ÁLGEBRA SUPERIOR II
ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NATURALES

TITULAR: DR. CHRISTOF GEISS.
AYUDANTE: FRANCISCO BARRIOS

Abstract. En la presente nota caracterizamos *axiomáticamente* a los naturales e introducimos el esquema general de la teoría de conjuntos y del sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Los axiomas de Peano. En contraste con Dedekind, Peano *no* estaba interesado en una construcción de los números naturales que partiera de la teoría de conjuntos sino en su axiomatización desde el punto de vista de un lenguaje formal, es decir, uno trataba el problema desde la perspectiva de la teoría de conjuntos mientras que otro lo abordaba desde la lógica matemática.

Originalmente (1889) eran *nueve* los axiomas que Peano presentó en su obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*. Después de análisis más profundos por parte de otros matemáticos y de la eliminación de aquellos postulados que podían deducirse a través de los otros nos han llegado los *cinco* axiomas para los conceptos básicos $\mathbb{N}$, 0 y S que se utilizan hoy :

(P1) $0 \in \mathbb{N}$.
(P2) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $S(n) \in \mathbb{N}$.
(P3) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $S(n) \neq 0$.
(P4) Si $0 \in E \subseteq \mathbb{N}$ y si $[n \in E \Rightarrow S(n) \in E]$ entonces $\mathbb{N} \subseteq E$.
(P5) Si $m,\ n \in \mathbb{N}$ entonces $[S(m) = S(n) \Rightarrow m = n]$.

Interpretados en términos de la teoría de conjuntos, estos axiomas equivalen a la definición de los números naturales dada en la nota de clase (1); e.g. $(P4)$ equivale al axioma (3) de la definición que a su vez equivale al Principio de Inducción Completa.

De esta manera las definiciones conjuntistas de número natural dadas por Zermelo en 1908 y por von Neumann en 1923 —cada una con su respectiva función sucesor— satisfacen los axiomas de Peano y en todo caso proveen *un modelo adecuado* de los números naturales de los cuales, por otro lado, ya vimos que son esencialmente *únicos*.

Sistema axiomático de la teoría de conjuntos. En 1893 el filósofo alemán Gottlob Frege dio en el primer volumen de su obra *Grundgesetze der Arithmetik* un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos ideada por Georg Cantor, con la intención de proveer una base lógica para la matemática. Entre dichos axiomas había uno que (en lenguaje moderno) decía:

> **Axioma de comprehensión:** Para toda propiedad P existe un conjunto M_P que contiene a todos y exclusivamente a todos los conjuntos que satisfacen la propiedad P.

Date: March 7, 2005.

Actualmente escribiríamos:

$$M_P := \{ \, x \mid x \ \text{ es un conjunto y } x \text{ satisface } P\}$$

¿Qué sucede cuando uno escoge P como la propiedad: *"no ser un elemento de sí mismo"*? De acuerdo con el axioma de comprehensión existe un conjunto:

$$M_P := \{ \, x \mid x \ \text{ es un conjunto y } \ x \notin x \, \}$$

¿Es M_P un elemento de sí mismo? Si respondemos *afirmativamente*, i.e. si $M_P \in M_P$ entonces por definición M_P es un conjunto y $M_P \notin M_P$. Si respondemos *negativamente*, dado que M_P es un conjunto y $M_P \notin M_P$ por definición tenemos que $M_P \in M_P$; es decir, llegamos en *ambos* casos a que:

$$M_P \in M_P \Longleftrightarrow M_P \notin M_P \text{ (una contradicción).}$$

Fue Bertrand Russell quien en 1901 descubrió esta *inconsistencia*[1] del axioma de comprehensión y a la que usualmente se le conoce como *paradoja de Russell*. Posteriormente fueron él, Zermelo, Hilbert y muchos matemáticos más quienes trataron de reparar los conceptos de la teoría de conjuntos *demolidos* tras la caída de los axiomas de Frege. A continuación presentamos el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel considerado por los especialistas en teoría de conjuntos de hoy en día como *consistente*. Cabe hacer notar que hasta la década de los veinte se creía posible una *demostración* de la consistencia del sistema de axiomas *deducida* a partir de sí mismo; sin embargo en 1931 Kurt Gödel demostró que esto *no* era posible.

- **Ex**. El axioma de existencia: Existe un conjunto.[2]
- **Ext**. El axioma de extensión: Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.
- **Sep**. El axioma de separación: Para toda propiedad P aplicable a los conjuntos y para todo conjunto x corresponde un conjunto y que contiene aquellos y exclusivamente aquellos elementos de x que satisfacen P. El conjunto y está *unívocamente* determinado gracias a **Ext**.
- **Emp**. El axioma de emparejamiento: Si x y y son conjuntos entonces existe otro conjunto z que contiene a x y a y como *elementos* y a *ningún* otro elemento.
- **U-Ax**. El axioma de unión: Para todo conjunto [que en este caso es mejor visualizar como un *sistema* de conjuntos] X existe el conjunto Y que incluye todos aquellos elementos que pertenecen al menos a uno de los elementos de X.
- **Pot**. El axioma del conjunto potencia: Para todo conjunto x existe el conjunto y [al que llamaremos el *conjunto potencia de* x y denotaremos por $\mathcal{P}(x)$] definido como el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de x.
- **Inf**. El axioma de infinitud: Existe un conjunto inductivo; i.e. un conjunto que contiene al conjunto vacío $\emptyset$ y al *sucesor* de cada uno de sus elementos. Definimos al sucesor de z como el conjunto cuyos elementos son justamente los elementos de z y z misma. Una vez que definamos el símbolo $\cup$ diremos que el sucesor de z es $z \cup \{z\}$.

[1]f. Falta de consistencia. Consistencia: 1. f. Duración, estabilidad, solidez. 2. f. Trabazón, coherencia entre las partículas de una masa o los elementos de un conjunto. Diccionario de la RAE.

[2]Originalmente Zermelo postuló la existencia del conjunto vacío, cfr. el teorema (1) y la nota que lo acompaña.

AE. El axioma de elección: Para todo conjunto se tiene una función de elección. Una función de elección correspondiente a un conjunto X es una función $f : X \to X$ tal que $f(y) \in y$ para toda $y \in X$ con $y \neq \emptyset$.

Estos son usualmente los axiomas que se requieren para hacer matemáticas sin tener que preocuparse demasiado por la teoría de conjuntos; sin embargo, en algunas situaciones en las que el marco conceptual es muy demandante se requiere de axiomas *adicionales* entre los que destacaremos:

Fun. El axioma de fundación: Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto $y \in x$ que no tiene elemento en común con x.

Rep. El axioma de reemplazo: Sea R una relación binaria entre conjuntos tal que para todo conjunto x corresponde *a lo más* un conjunto y con xRy, entonces para todo conjunto X existe el *conjunto* $\{\ y \mid$ existe una $x \in X$ con $xRy\ \}$

El sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel (**ZF**) comprende los axiomas anteriores *menos* el axioma de elección. Cuando estamos incluyendo a éste el sistema se denota **ZFC** y constituye la base axiomática más usada para lidiar con los problemas propios de la teoría de conjuntos.

Algunas consecuencias. A guisa de ejemplo esbozamos cómo los axiomas de Zermelo bastan para inferir aquellos conceptos de la teoría de conjuntos que usualmente necesita un matemático.

Teorema 1 (**Existencia y unicidad del conjunto vacío**). *Existe un conjunto que carece de elementos y al que llamaremos conjunto vacío. Dicho conjunto es único y lo denotaremos por* $\emptyset$.

Demostración:
Supongamos primero que el conjunto vacío *existe* y demostremos su *unicidad*: Si $\emptyset$ y $\widehat{\emptyset}$ representan a un conjunto que no tiene elementos entonces **Ext.** garantiza que estos conjuntos son *iguales*. De lo contrario deberíamos exhibir un elemento $z \in \widehat{\emptyset}$ tal que $z \notin \emptyset$; pero esto es imposible *precisamente* porque $\widehat{\emptyset}$ no tiene elementos. A este tipo de argumentos se les llama por*vacuidad* y es clara la simetría del razonamiento en el sentido de que pudimos comenzar argumentando sobre $\emptyset$ en vez de $\widehat{\emptyset}$ y llegar al mismo resultado.

Pasemos a la *existencia*: Por **Ex.** existe un conjunto x_0. Si x_0 carece de elementos entonces $\emptyset = x_0$ y hemos terminado. Por lo tanto supóngase que existe un elemento $z \in x_0$ y considérese la proposición P definida por "$z \neq z$"; una aplicación de **Sep.** implica la existencia del conjunto $\{\ z \in x_0 \mid z \neq z\ \}$ y por ende del vacío. □

Nota. Obsérvese que al definir un conjunto inductivo en **Inf.** se hizo mención del conjunto vacío; sin embargo como en la prueba anterior usamos *exclusivamente* los tres primeros axiomas, ninguna confusión debería surgir si *intercalamos* el teorema anterior entre **Sep.** y **Emp.**

Teorema 2 (**Combinaciones booleanas**). *Sean x, y conjuntos dados. Los siguientes conjuntos existen y son únicos.*

(A) *El conjunto de las $z \in x$ que cumplen la propiedad $I :=$ "$z \in y$".*
(B) *El conjunto que consiste de todos los elementos de x y de todos los de y.*
(C) *El conjunto de las $z \in x$ que cumplen la propiedad $D :=$ "$z \notin y$".*

*Al conjunto de **(A)** lo nombramos la* intersección *de x y y, al de **(B)** lo llamamos la* unión *de x y y y al de **(C)** lo llamamos la* diferencia *de x y y; los denotamos por $x \cap y$, $x \cup y$ y $x - y$, respectivamente.*

Demostración:
En los tres casos la unicidad se sigue del axioma **Ext.** En lo referente a la existencia es evidente que para **(A)** simplemente debemos aplicar **Sep.** a I; para **(B)** debemos utilizar **Emp.** para obtener el conjunto $\{ x, \ y \}$ y posteriormente **U-Ax.** da el resultado. La demostración de **(C)** es análoga a la de **(A)**. $\square$

De manera análoga se construyen uniones e intersecciones arbitrarias, parejas ordenadas, el producto cartesiano, los números naturales, etc. y es con esta última observación que llegamos al fin de nuestro breve recorrido por los rudimentos de la teoría de conjuntos.

Ejercicios. Escoja 3 de los siguientes ejercicios como tarea e intente resolverlos. No importa si no puede llevar esto a cabo por completo. Se evaluarán antes que nada el *manejo* de los conceptos vistos en clase y la *escritura* de las soluciones propuestas. Tómese su tiempo para *pensar* en el contenido de los problemas y esfuércese a *su* máximo.

(1) Analice el siguiente argumento para demostrar la *existencia* del conjunto vacío en el **teorema 1**:

> Considérese el conjunto $\mathfrak{I}$ de todos los conjuntos que contienen un subconjunto tal que éste no tiene elementos. Si $\mathfrak{I}$ no tiene elementos entonces $\mathfrak{I} = \emptyset$; en caso contrario $\mathfrak{A} \in \mathfrak{I}$ tiene un subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ no tiene elementos. Por lo tanto $\mathfrak{B} = \emptyset$.

¿Es correcto? Como quiera que sea *justifique con detalle* su respuesta.

(2) Sea X un conjunto no vacío —piénsese en este contexto a X como una *familia* posiblemente infinita de conjuntos— ¿Cómo se justifica utilizando **ZFC** la existencia del conjunto *intersección generalizada* $\cap X := \bigcap_{y \in X} y$? (*Sugerencia:* Piense en una propiedad adecuada).

(3) Dados conjuntos $x, \ y$ utilice el axioma de emparejamiento para garantizar la existencia de la *pareja ordenada* $(x, \ y)$. (*Sugerencia:* Recuerde la definición de pareja ordenada vista en clase). ¿Se le ocurre algún camino (utilizando *únicamente* **ZFC**) para demostrar la existencia del producto cartesiano $x \times y = \{ \ (u, \ v) \mid u \in x, \ v \in y \ \}$? (Puede consultar cualquier libro de álgebra y/o de teoría de conjuntos para ayudarse a este *último* respecto).

(4) Dé *por lo menos* tres equivalencias del axioma de elección (**AE**) y de ser posible que provengan de ramas distintas de las matemáticas. Apóyese en las fuentes bibliográficas.

(5) En el análisis del **axioma de comprehensión** de Frege se usó implícitamente el hecho de que la lógica es *binaria*; i.e. una proposición es verdadera o falsa y toma uno y sólo uno de estos valores de verdad. ¿Qué puede decir en términos de la lógica binaria sobre la afirmación de que en la expansión decimal de π existen cien ceros *consecutivos*? Si su respuesta es que semejante fenómeno es posible ¿por qué cree que todavía no se ha encontrado una *prueba* de este hecho? Si su respuesta apunta hacia que tal cosa es imposible sólo recuerde que la expansión decimal de π es infinita.