ÁLGEBRA SUPERIOR II
TAREA

TITULAR: DR. CHRISTOF GEISS.
AYUDANTE: FRANCISCO BARRIOS

Resuelva los problemas de acuerdo a lo que se le pide en cada caso. Las preguntas entre corchetes son material optativo que *no* perjudica a quien no lo entrega, pero *sí* beneficia a quien sí lo hace.

1. Relaciones

(1) Considere los conjuntos $A := \{a, b\}$ y $B := \{1, 2\}$. En la ayudantía del 21.02.05 se vio que el producto cartesiano $A \times B := \{(x, y) | x \in A,\ y \in B\}$ tiene cuatro elementos y que en consecuencia existen dieciséis relaciones en total. Enlístelas todas ellas.

(2) Considere el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Definimos en éste la siguiente relación:

Dados dos enteros p y q: $p \sim q \Longleftrightarrow p - q$ es un múltiplo de 7.

Demuestre que esta relación es de equivalencia y describa cómo son las clases de equivalencia. Repita el procedimiento escribiendo 4 en vez de 7. [Si en vez de escoger al 7 ó al 4 escogiésemos cualquier otro entero, ¿cómo cree que serían las clases de equivalencia? ¿Alcanza a distinguir el patrón?]

(3) Sea $C := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Escriba *todas* las relaciones de equivalencia que se pueden definir sobre C. [Dado un conjunto X de cardinalidad $|X| = n \geq 0$ ¿cuántas relaciones de equivalencia se pueden definir sobre X?]

2. Principio de Inducción

(1) A partir de la fórmula:

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \qquad \ldots (*)$$

obtenemos una fórmula para la suma de los n primeros cuadrados como sigue: Evaluando $(*)$ en $k = 1, 2, \ldots, n$ y sumando de manera *vertical* se tiene:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\
&\vdots \\
\underline{(n+1)^3 - n^3} &\underline{= 3(n)^2 + 3(n) + 1} \\
(n+1)^3 - 1 &= 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n
\end{aligned}$$

Date: February 28, 2005.

Haciendo los "despejes" correspondientes, esta última expresión podemos reescribirla como:

$$\frac{(n+1)^3 - 3(\sum_{i=1}^{n} i) - n - 1}{3} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

y en vista de que *sabemos* que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, la expresión final simplificada quedaría:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \ldots (**)$$

(i) Demuestre por inducción sobre n la validez de $(**)$.
(ii) A partir de la fórmula $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ repita el procedimiento descrito y obtenga una expresión para la suma de los primeros n cubos.
(iii) Demuestre por inducción la validez de su fórmula.

(2) Evalúe la expresión $F_n := 2^{2^n} + 1$ para $n := 0, 1, \ldots, 4$ y observe que en cada caso obtiene un número primo. ¿Qué pasa para n=5? [¿Podría demostrar por inducción que para toda $n \in \mathbb{N}$, el número F_n es primo?]

(3) Evalúe el polinomio $P(n) := n^2 - 81n + 1681$ en $n := 1, 2, \ldots, 80$ (puede usar Maple© o Mathematica©, por ejemplo) y verifique que en todos estos casos se obtiene un número primo (coteje contra un listado de números primos en un libro de teoría de números o en la red). Pruebe que $P(81)$ no es primo (esto es más fácil de lo que cree). Este es un dramático ejemplo de que una proposición aplicable a $\mathbb{N}$ puede ser cierta para un número finito de casos y después fallar.

3. El torito. (Puntos extra)

[Demuestre por inducción que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2]$$