Semestre 2005/2

Algebra Superior II
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 3

Ejercicio 1
Sea M un conjunto no vacio. Ademas sea F el conjunto de todos los mapeos de M en M y E el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre M. Determina $F \cap E \subset M \times M$.

Ejercicio 2
Sea M un conjunto y $\mathcal{P}(M)$ su conjunto potencia y sea $\varphi \colon M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ un mapeo. Definamos $X := \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}$ Demuestra que no existe $x \in M$ con $\varphi(x) = X$. Esto implica en particular que no hay mapeo suprayectivo de M sobre $\mathcal{P}(M)$.

Ejercicio 3

(a) Sea R un anillo con 1. Demuestra que el conjunto $M_2(R)$ de matrices 2×2 sobre R es un anillo con la adición y multiplicación natural introducidos en clase.

(b) Consideramos $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como conjunto. Sobre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ definimos las relaciones binarias

$$(a, b)+(a', b') = (a+a', b+b') \quad \text{y} \quad (a, b)\cdot(a', b') := (aa'+2bb', ab'+ba').$$

Demuestra que asi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un anillo con $1 = (1, 0)$ y encuentra un elemento $(a, b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ con $(a, b)^2 = 2 := 1 + 1$.

Ejercicio 4
Consideramos para un conjunto M su conjunto potencia $\mathcal{P}(M)$. Definimos sober $\mathcal{P}(M)$ las relaciones binarias

$$X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \quad \text{y} \quad X \cdot Y := X \cap Y$$

(a) Demuestra que con estas definiciones $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ es un anillo con 1. Identifica los elementos 0 y 1 en $\mathcal{P}(M)$.

(b) Sea $\mathcal{F}(M) := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \text{ es finito}\}$. Demuestra que $\mathcal{F}(M)$ es un subanillo de $\mathcal{P}(M)$. ¿Cuándo es $\mathcal{F}(M)$ un anillo con 1?

Ejercicio 5
Sea R un anillo tal que $x^2 := x \cdot x = x$ para todo $x \in R$. Demuestra que R es conmutativo. Encuentra un ejemplo.