Semestre 2005/2

Algebra Superior II
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 6

Ejercicio 1
Sea $(A,+)$ un grupo abeliano, y

$$\mathrm{End}(A) := \{f\colon A \to A \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\},$$

los *endomorfismos* de A. Definimos para $f, g \in \mathrm{End}(A)$ lo siguiente:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a) \quad \text{y} \quad (f \cdot g)(a) := f(g(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Entonces $f+g$ y $f \cdot g$ tambien son endomorfismos de A. Demuestra: $(\mathrm{End}(A), +, \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 2
Sea R un anillo, con $I, J \subset R$ ideales de R. Definimos

$$I \cdot J := \{\sum_{a=1}^{n} i_a j_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } i_a \in I, j_a \in J \text{ para } a = 1, 2, \ldots n\}$$

ademas $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$. Demuestra que $I \cap I$, $I + J$ y $I \cdot J$ son ideales de R.

Ejercicio 3
Sea $\mathbb{H} := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{Q} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4\}$. Definimos sobre $\mathbb{H}$ la adición por componentes, i.e. $(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$ y la multiplicación por $(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, donde

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 \\
f_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3 \\
f_3 &= a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2 \\
f_4 &= a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1
\end{aligned}$$

Demuestra que $\mathbb{H}$ es un campo no conmutativo. Pista: verifica que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}(a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$$

si $(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0,0,0,0)$. Verificar la asociatividad de la multiplicación puede costar algo de trabajo.

Ejercicio 4
Consideramos el subanillo $\mathbb{G} := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ de los complejos, "el anillo de los enteros Gaussianos".

(a) Demuestra que $\mathbb{G}$ es un anillo euclidiano. Pista: Considera la función $d\colon \mathbb{G}^* \to \mathbb{N}, a + ib \mapsto a^2 + b^2$.

(b) Determina las unidades en $\mathbb{G}$.

(c) Es $2 \in \mathbb{G}$ un elemento primo?