Algebra Superior II
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 7

Ejercicio 1
Consideramos el anillo $\mathbb{G}$ de los enteros Gaussianos del ejercicio 4 de la tarea 6.

(a) Determina en $\mathbb{G}$ un máximo comun divisor de $11 + 7i$ y $18 - i$.

(b) Demuestra que 3 es un primo en $\mathbb{G}$. ¿Cuántos elementos tiene $K := \mathbb{G}/(3\mathbb{G})$?

(c) Produzca las tablas de adición y multiplicación para K.

Ejercicio 2
Consideramos la inclusión de anillos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{G}$, con $\mathbb{Z}$ los enteros y $\mathbb{G}$ los enteros Gaussianos. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Demuestra: Si p no es un primo en $\mathbb{G}$ enonces existen enteros a y b tal que $p = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ con $(a + bi)$ y $a - bi$ primos en $\mathbb{G}$.

Ejercicio 3
Sea R un anillo euclidiano, y $a, b \in R^*$. Definimos los ideales $I = aR$ y $J = bR$. Demuestra que $IJ = I \cap J$ si y solamente si $I + J = R$. Ver ejercicio 2 de la tarea 6.

Ejercicio 4
(Propiedad universal de los polinomios) Sea R un anillo con uno, y $\iota \colon R \to R[x]$ el homomorfismo con $\iota(r) = rX^0$ para todo $r \in R$. Si $\phi \colon R \to S$ es un homomorfismo de anillos y $s \in S$. Entonces existe un único homomorfismo de anillos $\phi_s \colon R[x] \to S$ tal que $\phi_s(x) = s$ y $\phi_s \iota = \phi$.