

**Tarea 5****Ejercicio 17**

Consideramos para un campo  $\mathbb{F}$  el espacio  $V = \mathbb{F}^5$  con su base natural  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$ . Además consideramos para  $i = 1, 2, 3, 4$  el subespacio  $V_i := \text{span}_{\mathbb{F}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i)$  de dimensión  $i$ . Así tenemos una “bandera” de subespacios

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V_5 = V.$$

Determina todas las sucesiones posibles

$$(\dim(U \cap V_0), \dim(U \cap V_1), \dim(U \cap V_2), \dim(U \cap V_3), \dim(U \cap V_4), \dim(U, V_5))$$

que puedan ocurrir si  $U \subset V$  es un subespacio de dimensión 3.

**Ejercicio 18**

Sea  $c = a + bi \in \mathbb{C}$  un número complejo, con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Consideramos el mapeo  $\mu_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto c \cdot z$ , con  $\cdot$  la multiplicación usual en  $\mathbb{C}$ . Demuestra, que si identificamos  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  de la forma usual, entonces  $\mu_c$  es un mapeo lineal  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Determina una matriz  $\mathbf{m}_c \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$  tal que  $\mathbf{m}_c \cdot x = \mu_c(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 19**

Por definición, un complejo de cadena es una sucesión de homomorfismos

$$0 \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

tal que  $f_i \circ f_{i+1} = 0$ , i.e  $\text{Im}(f_{i+1}) \subset \text{Ker}(f_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Demuestra que entonces

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim \text{Ker}(f_i) - \dim \text{Im}(f_{i+1}))$$

**Fecha de entrega:** viernes 3 de octubre antes de la clase.