Semestre 2009/1

Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 6

Ejercicio 20
Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales donde los dos renglones son "exactos", i.e. tenemos $\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i+1})$ y $\mathrm{Ker}(g_i) = \mathrm{Im}(g_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{tikzcd}
V_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4", "\text{epi.}"'] & V_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3", "\cong"'] & V_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1", "\cong"'] & V_0 \arrow[d, "\varphi_0", "\text{mono.}"'] \\
W_4 \arrow[r, "g_4"] & W_3 \arrow[r, "g_3"] & W_2 \arrow[r, "g_2"] & W_1 \arrow[r, "g_1"] & W_0
\end{tikzcd}$$

Además, suponemos que los morfísmos "verticales" tengan las propiedades que indicamos, i.e. φ_4 es epimorfismo, φ_3 y φ_1 son isomorfismos y φ_0 es monomorfismo. Demuestra que bajo estas condiciones φ_2 es un isomorfismo.

Ejercicio 21
Consideramos las siguientes matrices en $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$G_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ y } R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Demuestra las siguientes identidades:

(a) $G_\varphi \cdot G_\psi = G_{\varphi+\psi}$

(b) $G_\varphi \cdot R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \cdot G_{-\psi}$

(c) $R_\varphi \cdot R_\psi = G_{\varphi-\psi}$

(d) $G_\varphi \cdot R_0 \cdot G_{-\varphi} = R_{2\varphi}$

Fecha de entrega: Viernes 10 de octubre antes de la clase.