Tarea 8

Ejercicio 25

Sea $\mathbf{a} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F})$ de rango r. Demuestra que entonces por media de una sucesión de transformaciones de renglones $\mathbf{a}$ se puede llevar a una matriz $\mathbf{b}$ de la siguiente forma: Para una (única) sucesión de números naturales $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ se tiene $b_{i,j_i} = 1$ para $i = 1, \ldots, r$ y $b_{i,k} = 0$ en los siguientes casos: si $i > r$ o $k < j_i$ o ($k = j_s$ y $i < s$ para algún s). En particular, si $m = r = n$ se puede transformar $\mathbf{a}$ por medio de transformaciones de renglones en la matriz unitaria.

Por ejemplo para $\mathrm{Mat}(4 \times 6, \mathbb{F})$ y la sucesión $(1, 3, 5)$ la matriz $\mathbf{b}$ seria de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26

Sea $\mathrm{U}_2 := \{\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^t = \mathbf{e}\}$ donde

$$\bar{\mathbf{u}}^t := \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{pmatrix} \text{ si } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestra:

(a) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{U}_2$ entonces $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}^t \in \mathrm{U}_2$ (esto significa que U_2 es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$).

(b) Sea $\mathbf{u} \in \mathrm{U}_2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\det(\mathbf{u} - \lambda\mathbf{e}) = 0$ entonces $|\lambda| = 1$.

Ejercicio 27

Calcula la determinante de la siguiente matriz:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Fecha de entrega: Viernes 24 de octubre antes de la clase.