

**Tarea 11****Ejercicio 32**

Calcula el determinante de la siguiente matriz de tamaño  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Usa expansión por la primera columna para una inducción.

**Ejercicio 33**

Sea  $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$  el conjunto de las matrices  $n \times n$  con coeficientes en los números enteros. Demuestra, que para  $\mathbf{u} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$  existe  $\mathbf{v} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$  tal que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}$ , si y solamente si  $\det(\mathbf{u}) \in \{+1, -1\}$ .

**Ejercicio 34**

Para una matriz  $\mathbf{u} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ , cualquier matriz que se obtiene de  $\mathbf{u}$  al “borrar” algunas columnas y renglones se llama *submatriz* de  $\mathbf{u}$ . Demuestra: Si  $\mathbf{v} \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$  es una submatriz de  $\mathbf{u}$  con  $\det(\mathbf{v}) \neq 0$ , entonces  $m \leq \text{rk}(\mathbf{u})$ . Conversamente, si  $\text{rk}(\mathbf{u}) = m$  entonces existe una submatriz  $\mathbf{v} \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$  de  $\mathbf{u}$  con  $\det(\mathbf{v}) \neq 0$ .

**Ejercicio 35**

Determina, calculando rangos, si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución, y determina en su caso el conjunto de soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

**Fecha de entrega:** Viernes 21 de noviembre antes de la clase.