Semestre 2009/2 | Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 5

Ejercicio 13
Sea $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sobre R definimos adición y multiplicación como sigue:

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b') \text{ y } (a,b)\cdot(a',b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

(a) Demuestra que el mapeo $R \to \mathbb{C}, (a,b) \mapsto a + ib$ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

(b) Demuestra que $(R, +, \cdot)$ es un anillo euclidiano con la función $d\colon R \to \mathbb{N}_0, (a,b) \mapsto a^2 + b^2$.

Ejercicio 14
El Algoritmo de Euclídes

(a) Sea R un anillo euclidiano, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$. Entonces para algún $n \in \mathbb{N}_0$ existen elementos $q_0, q_1, \ldots, q_n \in R$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ tal que

$$\begin{aligned}
b &= q_0 a + r_1, & d(r_1) &< d(a),\\
a &= q_1 a + r_2, & d(r_2) &< d(r_1),\\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & d(r_3) &< d(r_2),\\
&\vdots & &\vdots\\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & d(r_n) &< d(r_{n-1}),\\
r_{n-1} &= q_n r_n.
\end{aligned}$$

Demuestra que r_n es un máximo común divisor de a y b.

(b) Utiliza el algoritmo de Euclides para encontrar enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $146p + 39q = 1$.

Ejercicio 15
Consideramos el anillo R del Ejercicio 13. Este anillo se llama también los *enteros Gaussianos*.

(a) ¿Es $2 := (2, 0)$ un primo en R?

(b) Determina en R un máximo común divisor de $(11, 7)$ y $(18, -1)$.
Pista: Ejercicio 14

(c) Demuestra que $3 := (3, 0)$ es un primo en R. ¿Cuántos elementos tiene $K := R/(3R)$?

(d) Produzca las tablas de adición y multiplicación para K.

Fecha de entrega: Martes 24 de marzo antes de la clase.