Semestre 2009/2 — Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 6

Ejercicio 16
Sea $\mathbb{R}$ el campo de los números reales.

(a) Demuestra que $p = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ es irreducible si y solamente $a^2 < 4b$.

(b) Sea $p \in \mathbb{R}[X]$ con $\deg(p) \geq 3$. Demuestra que p no es irreducible. Pista: Utiliza que $p \in \mathbb{C}[X]$ factoriza en factores lineales, y demuestra que si $z = a+bi \in \mathbb{C}$ es un cero de p entonces también el conjugado $\bar{z} := a-bi$ lo es.

Ejercicio 17
Sea $\mathbb{F}$ un campo. Demuestra que un polinomio $p \in \mathbb{F}[X]$ de grado 2 o 3 es irreducible si y solamente p no tiene ningún cero en $\mathbb{F}$. Encuentra un ejemplo de un polinomio de grado 4 en $\mathbb{R}[X]$ que no tiene ningún cero en $\mathbb{R}[X]$ pero que no sea irreducible,

Ejercicio 18
Sea A un anillo conmutativo con 1. Para $\mathbf{a} \in \mathrm{Mat}(m \times n, A)$ denotamos para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ y $1 \leq j_i < j_2 < \cdots < j_k \leq n$

$$\mathbf{a}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} := \det\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{pmatrix},$$

el *menor* de $\mathbf{a}$ asociado a $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ y $1 \leq j_i < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ (en particular, $1 \leq k \leq \mathrm{mín}\{m, n\}$).

Demuestra: Para $\mathbf{b} \in \mathrm{Mat}(n \times m, A)$ y $\mathbf{c} \in \mathrm{Mat}(m \times l, A)$ y $1 \leq 1i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ y $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq l$ el menor de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}$$

esta dado por

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq m} \mathbf{b} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}$$

Instrucciones:

(a) Demuestra que podemos asumir $p = n = l$. Entonces el menor a evaluar es simplemente $\det(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

(b) Demuestra que para $m < n$ ambos lados de la ecuación dan 0.

(c) Demuestra para $m \geq n$ la siguiente formula

$$\det(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \sum_{1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_n \leq m} c_{j_1,1} c_{j_2,2} \cdots c_{j_n,n} \det(\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_n})$$

si $\mathbf{b}_j$ denota la columna j de $\mathbf{b}$.

(d) $\det(\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \ldots, \mathbf{b}_{j_n}) = 0$ si $j_i = j_k$ para algún $i \neq k$. En otro caso este determinante es hasta un signo un menor de $\mathbf{b}$. Después de agrupar en la formula de (c) los sumandos no-triviales que corresponden hasta un signo al mismo menor, se obtiene la formula deseada.

Fecha de entrega: martes 14 de abril antes de la clase.