Semestre 2009/2 — Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 10

Ejercicio 27

Sea $(V, \langle -, - \rangle)$ un espacio con producto interno sobre $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ la norma correspondiente. Demuestra:

(a) En las desigualdades de triangulo y de Cauchy-Schwarz se tiene la igualdad si y solamente si uno de los dos vectores es un multiplo del otro.

(b) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \leq \|u - x\| + \|x - v\|$ para todo $u, v, x \in V$.

(c) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ para todo $u, v \in V$ (identidad del paralelogramo).

(d) Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ vale la *identidad de polarización*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2)$$

para todo $u, v \in V$.

Ejercicio 28

Sea $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, y sea $\|-\| : V \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $(V, \|-\|)$ es un espacio normado si $\|-\|$ cumple las siguientes propiedades:

(i) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\|v\| = 0$ si y solamente si $v = 0$,

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in V$,

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$.

Para $p \in \mathbb{N}$ definimos

$$\|-\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots x_n) \mapsto \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots |x_n|^p} \text{ y}$$
$$\|-\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots x_n) \mapsto \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

(a) Demuestra que $(\mathbb{R}^n, |-|_p)$ con $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es un espacio normado.

(b) Dibuja para $n = 2$, y $p \in \{1, 2, 3, 4, \infty\}$ los conjuntos $S_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ en el plano $\mathbb{R}^2$.

(c) Demuestra que para $n \geq 2$ y $p \neq 2$ en $(\mathbb{R}^n, \|-\|_p)$ *no* se cumple la identidad del paralelogramo.

Ejercicio 29
Sea $(V, \|-\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ que cumple la identidad del paralelogramo $\|u + v\| + \|u - v\| = \frac{1}{2}(\|u\| + \|v\|)$ para todo $u, v \in V$. Demuestra que entonces $\langle u, v\rangle := \frac{1}{4}(\|u + v\| - \|u - v\|)$ define un producto interno para V.
Pista: Evalua $8\langle u, x\rangle + 8\langle v, x\rangle$ para demostrar que $\langle u, 2x\rangle = 2\langle u, x\rangle$ y $\langle u + v, x\rangle = \langle u, x\rangle + \langle v, x\rangle$. Después continua con la demostración que $\langle u, \lambda, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle$

Fecha de entrega: Martes 26 de mayo antes de la clase.