

Tarea 6

Ejercicio 19

Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales donde los dos renglones son “exactos”, i.e. tenemos $\text{Ker}(f_i) = \text{Im}(f_{i+1})$ y $\text{Ker}(g_i) = \text{Im}(g_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 V_4 & \xrightarrow{f_4} & V_3 & \xrightarrow{f_3} & V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_0 \\
 \text{epi.} \downarrow \varphi_4 & & \cong \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_2 & & \cong \downarrow \varphi_1 & & \text{mono.} \downarrow \varphi_0 \\
 W_4 & \xrightarrow{g_4} & W_3 & \xrightarrow{g_3} & W_2 & \xrightarrow{g_2} & W_1 & \xrightarrow{g_1} & W_0
 \end{array}$$

Además, suponemos que los morfismos “verticales” tengan las propiedades que indicamos, i.e. φ_4 es epimorfismo, φ_3 y φ_1 son isomorfismos y φ_0 es monomorfismo. Demuestra que bajo estas condiciones φ_2 es un isomorfismo.

Ejercicio 20

Consideramos las siguientes matrices en $\text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$G_\varphi := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ y } R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Demuestra las siguientes identidades:

- (a) $G_\varphi \cdot G_\psi = G_{\varphi+\psi}$
- (b) $G_\varphi \cdot R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \cdot G_{-\psi}$
- (c) $R_\varphi \cdot R_\psi = G_{\varphi-\psi}$
- (d) $G_\varphi \cdot R_0 \cdot G_{-\varphi} = R_{2\varphi}$

Ejercicio 21

Sea $\mathbf{m} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ de rango n . Demuestra que se puede transformar a \mathbf{m} en la matriz unitaria \mathbf{e} , usando solo transformaciones elementales de *renglones*. Aquí,

$$\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fecha de entrega: Martes 4 de octubre antes de la clase.