Semestre 2012/2 Algebra Moderna

Christof Geiss

Tarea 7

Ejercicio 23

Sea R un anillo conmutativo con $0 \neq 1_R \in R$, y $n \in \mathbb{N}_{geq2}$. Consideramos el anillo de matrices $S := \mathrm{Mat}(n \times n, R)$. Demuestra:

(a) S es anillo no conmutativo con 1, no libre de divisores de 0.

(b) Los ideales de S son precisamente de la forma $\mathrm{Mat}(n \times n, I)$ para algún ideal I de R. Pista: Para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $m \in \mathrm{Mat}(n \times n, R) = S$ sea $m_{i,j}$ la componente (i, j) de m. Si $J \subset S$ es un ideal demuestra que $J_{i,j} := \{m_{i,j} \mid m \in J$ es un ideal de R, que no depende de i y j.

(c) Encuentra un ejemplo de un anillo simple (i.e. que no tiene ideales no triviales) que no sea un campo.

Ejercicio 24

(a) Deduzca del teorema Chino de Residuos el siguiente resultado: Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ con $\mathrm{mcd}(z_i, z_j) = 1$ para todo $i \neq j$. Entonces para cualquier $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ existe un $x \in \mathbb{Z}$ con $x \equiv r_i \pmod{z_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si x' es otra solución, entonces $x - x' \in z_1 z_2 \cdots z_n \mathbb{Z}$.

(b) Encuentra todos los $x \in \mathbb{Z}$ que cumplan las siguientes 4 congruencias: $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{8}$, $x \equiv 3 \pmod{9}$, $x \equiv 4 \pmod{1}1$.

Ejercicio 25

Demuestra que las siguientes tres condiciones para un anillo R son son equivalentes:

(i) Para cada cadena ascendente de ideales $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ de ideales en R existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Todo ideal I de R es finitamente generado, es decir existen $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$ con $(a_1, \ldots, a_m) = I$.

(c) Cada familia $\mathcal{I}$ de ideales en R tiene un elemento máximo, es decir que existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \subset J$ para algún $J \in \mathcal{I}$ implica $I = J$.

Recuerda que estas condiciones se cumplen si y solamente si R es noetheriano.

Para entregar en la Ayudantía del 29 de Marzo.