

Tarea 10**Ejercicio 33**

Sea K un campo, $K(X) := \text{Frac}(K[X])$ el campo de funciones racionales sobre K , y $f \in K[X]$ un polinomio con $\deg(f) = n \geq 1$. Demuestra que $K(X) \supset K(f)$ es una extensión algebraica de grado n .

Ejercicio 34

Sea $L \supset K$ una extensión algebraica, y $f \in L[X]$. Demuestra:

- (a) Si f es irreducible, entonces existe un único polinomio irreducible y normado $g \in K[X]$, tal que $f \mid g$ en $L[X]$.
- (b) Si f no es necesariamente irreducible y $\deg(f) \geq 1$ existe un polinomio $g \in K[X]$ con $f \mid g$ en $L[X]$.

Ejercicio 35

Determina para los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ un conjunto generador para su campo de descomposición sobre \mathbb{Q} y calcula en cada caso el grado de estos campos sobre \mathbb{Q} :

$$X^4 - 2X^2 + 9, \quad X^4 - 16X^2 + 4, \quad X^4 + 4, \quad X^3 - 7, \quad X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3$$

Ejercicio 36

Sea $f = X^3 + X^2 - Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

- (a) Demuestra que $A = \mathbb{Q}[X, Y]/(f)$ es un dominio entero que contiene a \mathbb{Q} como un subanillo.
- (b) Demuestra que el homomorfismo de anillos

$$\alpha: \mathbb{Q}[X] \rightarrow A \text{ determinado por } \alpha|_{\mathbb{Q}} = \text{Id}_{\mathbb{Q}} \text{ y } \alpha(X) = X + (f)$$

es inyectivo.

- (c) ¿Es el campo de fracciones $\text{Frac}(A)$ algebraico sobre \mathbb{Q} ?

A discutir en la Ayudantía del 3 de Mayo.