Semestre 2012/2 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 12

Ejercicio 41
Sea k un campo. Demuestra:

(a) $f \in k[X]$ tiene ceros múltiplos en su campo de descomposición si y solamente si f y la derivada formal $D(f)$ tienen un divisor común no trivial.

(b) Supongamos que $\mathrm{char}(k) = p > 0$. Entonces para $f \in k[X]$ se tiene $D(f) = 0$ si y solamente si existe un polinomio $g \in k[X]$ con $f = g(X^p)$.

(c) Sea $\mathrm{char}(k) = p > 0$ y $F_p\colon k \to k, x \mapsto x^p$ el endomorfismo de Frobenius. Demuestra que k es perfecto si F_p es suprayectivo. Pista: utiliza (b)

Ejercicio 42
En la clase comenzamos a discutir el campo de descomposición $F \supset \mathbb{Q}$ del polinomio $f := X^4 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Denotamos los ceros de f como sigue:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}},\ x_2 = -x_1, x_3 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}, x_4 = -x_3.$$

Concluimos que el grupo de Galois $G := \mathrm{Gal}(f)$ era un grupo diédrico D_4.

(a) Describa G como subgrupo de $\mathfrak{S}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ y justifica.

(b) Describa todos los campos intermedios L de $K \supset \mathbb{Q}$ y sus respectivas inclusiones. ¿Para cuáles de estos campos intermedios es $L \supset \mathbb{Q}$ una extensión de Galois? Usa el teorema principal de la teoría de Galois para justificar el resultado.

Ejercicio 43
Consideramos los campos

$$L_1 := \mathbb{Q}[\sqrt{1+2i}, \sqrt{1-2i}],\ L_2 := \mathbb{Q}[\sqrt{6+2\sqrt{-7}}, \sqrt{6-2\sqrt{-7}}].$$

Demuestra que las extensiones de campos $L_i \supset \mathbb{Q}$ son de Galois para $i = 1, 2$. Determina en ambos casos el grupo de Galois y todos los campos intermedios.

Ejercicio 44
Consideramos $f := X^5 + aX^4 - b \in \mathbb{F}_5[X]$ con $b \neq 0$, y α sea un cero de f en la cerradura algebraica L de $\mathbb{F}_5$, y $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$. Además denotamos con F el endomorfismo de Frobenius de L.

(a) Demuestra que $F(\alpha) = \frac{b_0+b_1\alpha}{a_0+a_1\alpha}$ para ciertos $a_i, b_i \in \mathbb{F}_5$ $(i = 0, 1)$.

(b) Determina los ceros de f en $\mathbb{F}_5$.

(c) ¿Para cuáles $a, b \in \mathbb{F}_5$ es f irreducible?

(d) Determina todos los ceros de f en K en términos de α para los casos cuando f es irreducible. Pista para (c) y (d): Sea $\beta \in L$ un cero de $g \in \mathbb{F}_5[X]$, entonces $g(F(\beta)) =$?

Problemas 41 y 42 a discutir, problemas 43 y 44 entregar por escrito en la Ayudantía del 24 de Mayo.