Semestre 2015/2

Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

Tarea 2

Sea A un anillo y $e_1, \dots, e_n$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Decimos que A es *básico* si $e_iA \cong e_jA$ implica $i = j$. Para un A-módulo M se define $\mathrm{soc}(M)$ como la suma de todos los submódulos simples de M.

Ejercicio 1
Sea K un campo y $A := \mathbb{T}_4(K)$ el anillo de matrices triangulares inferiores de tamaño 4×4. Denotamos con e_i el idempotente estándar con $(e_i)_{a,b} = \delta_{a,b}\delta_{i,a} \in A$. Demuestra:

(a) e_1, e_2, e_3, e_4 es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos para A

(b) A es un álgebra básico.

(c) $D(Ae_1) \cong e_4A$ como A-módulos a derecha.

(d) e_4A es la envolvente inyectiva del A-modulo simple e_1A.

(e) los módulos proyectivos e_2A y e_3A no son inyectivos.

Ejercicio 2
Sea A un anillo y M un A-módulo. Demuestra

(a) Sea $S \leq M$ la suma de todos los submódulos superfluos de M, entonces $S = \mathrm{rad}(M)$. Pista: sea $m \in M$, entonces mA no superfluo en M implica que existe un submódulo máximo U_m de M que no contenga a m (Lema de Zorn).

(b) Si M es finitamente generado entonces $\mathrm{rad}(M)$ es superfluo en M.

(c) Si $E \leq M$ es un submódulo esencial, entonces $\mathrm{soc}(M) \subset E$.

(d) Si $l(M)$ es finito entonces $\mathrm{soc}(M)$ es un submódulo esencial de M.

(e) Si N es otro A-módulo y $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ entonces f induce un homomorfismo $\mathrm{soc}(f)\colon \mathrm{soc}(M) \to \mathrm{soc}(N)$. Si $l(M)$ es finito, entonces f es inyectivo si y solamente si $\mathrm{soc}(f)$ es inyectivo.

Ejercicio 3
Sea A un K-álgebra de dimensión finita y $M \in \operatorname{mod} A$. Demuestra

(a) En $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ se tiene una sucesión corta exacta natural $\operatorname{rad}(DM) \to DM \to D\operatorname{soc}(M) \to 0$

(b) La inclusión $\operatorname{soc}(M) \hookrightarrow M$ induce un isomorfismo de envolventes inyectivas $E(\operatorname{soc}(M)) \cong E(M)$.

(c) Consideramos $A := \{M \in \operatorname{Mat}_3(K) \mid M_{1,2} = M_{1,3} = M_{3,1} = M_{3,2} = 0\}$. Verifica que A tiene un módulo a derecha inescindible y proyectivo P tal que $E(P)$ es suma directa de dos módulos inescindibles.

Ejercicio 4
Sea K un campo y G un grupo finito. Demuestra que para el álgebra de grupo $A := KG$ un módulo finitamente generado es proyectivo si y solamente si es inyectivo. Pista: Considera la forma bilineal $(-,-)\colon A \times A \to K$ definida por $(g,h) = \delta_{g^{-1},h}$ para $g,h \in G$ y δ la función de Kronecker. Esta forma es no-degenerada, asociativa en el sentidos que $(ab,c) = (a,bc)$ para todo $a,b,c \in A$, y simétrica. Usa esta forma para definir un isomorfismo de A-A-bimódulos $A \to DA$.

Fecha de entrega: martes 3 de marzo 2015, antes de la aydantía.