Semestre 2015/2

Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

Tarea 3

Ejercicio 9
Sea K un campo, Q un carcaj finito y $I \subset (KQ_+)^2$ un ideal en el álgebra de caminos KQ. Demuestra:

(a) KQ/I es conexa si y solamente si Q es conexa.

(b) Sea K algebraicamente cerrado y A un K-álgebra básica de dimensión finita. Entonces el carcaj Q_A de A es conexo si y solamente si A es conexa.

Ejercicio 10
Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. El carcaj opuesto Q^{op} es definido como sigue: $Q^{\mathrm{op}} = (Q_0, Q_1, s', t')$ con $s' = t$ y $t' = s$.

(a) Demuestra que $(KQ)^{\mathrm{op}} \cong KQ^{\mathrm{op}}$.

(b) Sea $I \subset KQ$ un ideal admisible. Identifica un ideal $I^{\mathrm{op}} \subset KQ^{\mathrm{op}}$ tal que $KQ^{\mathrm{op}}/I^{\mathrm{op}} \cong (KQ/I)^{\mathrm{op}}$.

Ejercicio 11
Consideramos el carcaj

$$Q\colon \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

(a) Demuestra que los siguientes dos ideales I_1 y I_2 en KQ son admisibles y encuentra una K-base de KQ/I_j, donde:
$I_1 = \langle \alpha^2 - \beta\gamma, \gamma\beta - \gamma\alpha\beta, \alpha^4 \rangle$,
$I_2 = \langle \alpha^2 - \beta\gamma, \gamma\beta, \alpha^4 \rangle$.

(b) Demuestra en caso $\mathrm{char}(K) \neq 2$ que $I_1 \neq I_2$ pero $KQ/I_1 \cong KQ/I_2$.

Ejercicio 12
Sea K un campo y Q un carcaj finito. Demuestra que las categorías de representaciones $\mathrm{Rep}_K(Q)$ y $\mathrm{rep}_K(Q)$ son K-categorías abelianas. Identifica en particular los siguientes conceptos: núcleo y co-núcleo de un homomorfismo, subrepresentación y representación cociente.

Nota. Ejercicios 9 y 12 por escrito, Ejercicios 10 y 11 solo para exposición. Fecha de entrega: Martes 17 de Marzo de 2015 antes de la ayudantía