

Tarea 6**Ejercicio 19**

Sea A un K -álgebra de dimensión finita y $M, N \in \text{mod } A$.

- (a) Demuestra que $\varphi: (-) \otimes_A (?) \rightarrow \text{Hom}_A(?, -)$, definido por

$$\varphi_N^M: N \otimes_A M^t \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), n \otimes f \mapsto (m \mapsto n \cdot f(m)),$$

es una transformación natural y K -lineal entre K -funtores $(\text{mod } A)^{\text{op}} \times (\text{mod } A) \rightarrow \text{mod } K$.

- (b) Sea $P \in \text{mod } A$ proyectivo. Demuestra que φ_-^P y $\varphi_P^?$ son isomorfismos naturales.

Ejercicio 20

Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo, $n \in \mathbb{N}_+$ y $\mathbb{Z}_{p^n} := \mathbb{Z}/(p^n)$ visto como grupo abeliano. Demuestra que la sucesión corta exacta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \xrightarrow{\begin{pmatrix} q_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_{p^{n-1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n+1}} \xrightarrow{(u_{n-1}, -q_n)} \mathbb{Z}_{p^n}$$

es una sucesión de Auslander-Reiten en la categoría de grupos abelianos finitamente generados. Aquí, $u_n: \mathbb{Z}_{p^n} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{n+1}}$ es la inclusión canónica, y $q_n: \mathbb{Z}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$ es la proyección canónica.

Pista: verifica directamente (usando la clasificación de los grupos abelianos finitamente generados inescindibles) que (p_{n+1}, u_{n-1}) es un morfismo que casi se escinde a derecha etc.

Ejercicio 21

Sea $\xi: 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ una sucesión corta exacta en $\text{mod } A$ que no se escinde. Demuestra: f es irreducible si y solamente si las siguientes dos condiciones se cumplen.

- (i) Si $\text{Im}(f) \subset M' \subsetneq M$ es una cadena de submódulos, entonces $\text{Im}(f)$ es un sumando directo de M' .
- (ii) Si $X \in \text{mod } A$ y $\eta \in \text{Ext}_A^1(N, X)$ entonces existe $u \in \text{Hom}_A(X, L)$ t.q. $\text{Ext}_A^1(N, u)(\eta) = \xi$ ó existe $v \in \text{Hom}_A(L, X)$ tal que $\text{Ext}_A^1(N, v)(\xi) = \eta$.

Trata de caracterizar la irreducibilidad de g de una forma similar.

Nota: Ejercicio 19 se entrega el 28 de abril, ejercicios 20 y 20 se entregan el 5 de mayo.