Semestre 2015/2

Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

Tarea 7

Ejercicio 22
Sea A un K-álgebra de dimension finita y $f\colon L \to M$ un morphismo irreducible en $\operatorname{mod} A$. Demuestra que para $X \in \operatorname{mod} A$ con $\operatorname{Hom}_A(M, X) = 0$ el mapeo K-lineal $\operatorname{Ext}^1_A(X, f)\colon\ \operatorname{Ext}^1_A(X, L) \to \operatorname{Ext}^1_A(X, M)$ es inyectivo.

Ejercicio 23
Sea A un K-álgebra de dimension finita y $X \in \operatorname{mod} A$. Demuestra que a lo más existe un número finito de clases de isomorfía de A-modulos inescindibles N tales que en la sucesion de Auslander-Reiten

$$0 \to \tau N \to E_N \to N \to 0,$$

el módule E_N tenga un sumando directo isomorfo a X.

Ejercicio 24
Consideramos el carcaj de Kronecker $Q\colon\ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$ y $A := KQ$. Para $t \in K$ y $n \in \mathbb{N}_+$ la representación K-lineal

$$M_t^{(n)}\colon\ K^n \underset{J_n(t)}{\overset{\mathrm{id}_{K^n}}{\rightrightarrows}} K^n\ ,$$

donde $J_n(t) \in K^{n\times n}$ es el bloque de Jordan con valor propio (generalizado) t.

(a) Demuestra que $\operatorname{End}_A(M_t^{(n)}) \cong K[X]/(X^n)$ y $\operatorname{pdim}_A(M_t^{(n)}) = 1$.

(b) Verifica que $\tau M_t^{(n)} \cong M_t^{(n)}$.

(c) Demuestra que para $k = 1, 2, \ldots, n$ existe una sucesión corta exacta y natural en mód A de la siguiente forma:

$$\xi_{n,k}\colon\ 0 \to M_t^{(n)} \to M_t^{(n-k)} \oplus M^{(n+k)} \to M_t^{(n)} \to 0,$$

donde $M_t^{(0)} := 0$.

(d) ¿Cúal de las sucesiones $\xi_{n,k}$ es una sucesión de Auslander-Reiten? Pista: descarte posibilidades que involucran morfismos que no sean irreducibles y analiza como el generador $\bar{x}$ de $\operatorname{End}_A(M_t^{(n)})$ actúa sobre las clases $[\xi_{n,k}] \in \operatorname{Ext}^1_A(\tau M_t^{(n)}, M_t^{(n)})$ no descartadas.

Nota: Fecha de entrega: **12 de Mayo**