CURSO AVANZADO DE ÁLGEBRA: REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS DE DIMENSION FINITA – SEMESTRE 2015/2

CHRISTOF GEISS

Ayudantía

Habrá semanalmente una sesión de 90 minutos de ayudantía donde los alumnos expondrán problemas y material complementario para profundizar el material del curso.

1. Categorías y Funtores

Revisamos conceptos básicos de la teoría de anillos: Categorías de módulos, sucesiones exactas; módulos simples, inescendibles, proyectivos e inyectivos; radical y sóclo de un módulo; teorema de Jordan-Hölder. Funtores y equivalencias entre categorías. Estudiaremos brevemente las nociones básicas de álgebras de Frobenius.

2. El Carcaj de Gabriel

Veremos que, sobre un campo algebraicamente cerrado, la categoría de módulos sobre un álgebra de dimensión finita es equivalente a las representaciones de un carcaj con relaciones. Estudiaremos con cuidado como varias nociones de teoría de módulos, a saber módulos simples, proyectivos e inyectvos tienen una interpretación muy intuitiva en este contexto [CLS82].

3. Sucesiones de Auslander-Reiten

Demostraremos la existencia de sucesiones de Auslander-Reiten para módulos de dimensión finita sobre álgebras de dimensión finita y algunos de sus aspectos funtoriales. En particular estudiamos la formula de Auslander-Reiten y la funtorialidad del traslado de Auslander-Reiten para álgebras hereditarias. Veremos el carcaj de Auslander Reiten como el carcaj de Gabriel para la categoría de módulos de dimensión finita [Gab79].

4. Álgebras Hereditarias y Representaciones de Carcajes

Álgebras hereditarias de dimension finita tienen una interpretación particularmente sencilla en el lenguaje de carcajes con relaciones: el conjunto de relaciones es vacío. Estudiamos desde este punto de vista los funtores de reflexión de Bernstein-Gelfand-Ponomarev y la demostración de estos autores del teorema de Gabriel: Un carcaj es de tipo de representación finita si y solamente si es un carcaj de tipo Dynkin. En este caso, los inescendibles estan en biyección con las raíces positivas [BGP73].

Los funtores de Coxeter se definen en términos de las arriba mencionadas reflexiones y representan una forma eficiente de calcular el trasladado de Auslander-Reiten para representaciones de carcajes. Revisamos la demostración de Gabriel-Riedtmann de este resultado [Gab79].

5. Álgebras Preproyectivas

A cada carcaj se puede asociar un álgebra preproyectivo en términos de un carcaj con relaciones. Estas álgebras tienen propiedades fascinantes, a saber: Vistas como representaciones del carcaj, se descomponen en suma directa de los módulos preproyectivos, y su categoría de módulos tiene simetrías poco usuales [BBK02],[Rin96]. Por ejemplo veremos la dualidad $\operatorname{Ext}^1_\Pi(X,Y) \cong D\operatorname{Ext}^1_\Pi(Y,X)$ para un álgebra preproyectivo Π. De eso se deriva que en el caso Dynkin Π es un álgebra de Frobenius y se tiene $\tau_\Pi^6 X \cong X$ para todo Π-módulo X de dimensión finita.

References

[ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory.* London Mathematical Society Student Texts, **65**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.

[BGP73] I.N. Bernstein, I. M. Gelfand, V.A. Ponomarev: *Coxeter functors, and Gabriel's theorem.* Russian Math. Surveys **28** (1973), no. 2, 17–32

[BBK02] S. Brenner, M.C.R. Butler, A.D. King: Periodic algebras which are almost Koszul. Algebr. Represent. Theory **5** (2002), no. 4, 331–367.

[CLS82] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón: *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones.* Monografías del Instituto de Matemáticas , **11**. Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, 1982. x+113 pp.

[Gab79] P. Gabriel: *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras.* Representation theory, I (Ottawa, 1979), pp. 1–71, Lecture Notes in Math., **831**, Springer, Berlin, 1980.

[Rin84] C.M. Ringel: *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms.* Lecture Notes in Mathematics, **1099**. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xiii+376 pp.

[Rin96] C.M. Ringel: *The preprojective algebra of a quiver.* Algebras and modules, II (Geiranger, 1996), 467–480, CMS Conf. Proc., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.