Semestre 2016/2 Algebras de Lie y sus Representaciones

Christof Geiss
Daniel Labardini

Tarea 2

Ejercicio 5

(a) Sea k un campo. En el contexto del Ejercicio 1 (b) consideramos para $\lambda \in k$ y $D \in \mathrm{Der}_k(A)$ el subespacio propio generalizado

$$A_\lambda := \{a \in A \mid (D - \lambda \operatorname{Id}_A)^k a = 0 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $A_\lambda \cdot A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$.

(b) Sea A un k-álgebra asociativa. Demuestra para $x, y \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ la formula

$$(\mathrm{ad}(x))^n(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^i y x^{n-i}.$$

(c) Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $x \in \mathfrak{g}$, el operador $\mathrm{ad}(x)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$. Además, si δ es otra derivación de $\mathfrak{g}$, entonces $[\delta, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(\delta(x))$.

Ejercicio 6

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un campo k.

(a) Un forma lineal $\chi\colon \mathfrak{g} \to k$, que es un homomorfismo en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(1, k)$ se llama muchas veces un carácter de $\mathfrak{g}$. Demuestra que la forma lineal χ es un carácter si y solamente si $\chi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

(b) Sea $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces $\mathfrak{g}$ es soluble si y solamente si $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{Ker}(\varphi)$ lo son. ¿Lo mismo vale si reemplazamos "soluble" por "nilpotente"?

(c) Si I y J son ideales solubles de $\mathfrak{g}$, entonces también la suma $I + J$ es un ideal soluble. <u>Pista:</u> Considera la proyección $I + J \to (I + J)/I$. Concluya que si $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, entonces $\mathfrak{g}$ tiene un máximo ideal soluble, el *radical* $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$.

Ejercicio 7

Sea V una representación de dimensión 2 de un álgebra de Lie nilpotente, y $U \subset V$ una subrepresentación de dimensión 1. Demuestra: si $U \not\cong V/U$, entonces $V \cong U \oplus V/U$. <u>Pista:</u> verifica que un álgebra de Lie nilpotente y contenido en $\mathfrak{t}(2; n)$ es abeliano. Aquí, $\mathfrak{t}(n; k)$ denota el álgebra de Lie soluble de las matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$ con entradas en k.

Ejercicio 8

Sea $\mathrm{char}(k) = 0$ y $n \geq 1$. Demuestra que el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n; k)$ es simple.
Pista: si un ideal I de $\mathfrak{gl}(n; k)$ no consiste solamente de matrices diagonales, entonces $I \supset \mathfrak{sl}(n; k)$. Al aplicar los operadores $\mathrm{ad}(E_{k,k})$ a los elementos de tal I se ve que para existen $i \neq j$ con $E_{i.j} \in I$. Entonces sucesivamente $[E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j} \in I$, $[E_{i,i} - E_{j,j}, E_{i,k}] = E_{i,k} \in I$ para $k \notin \{i, k\}$ y similarmente $E_{k,j} \in I$ para $k \notin \{i, j\}$, $E_{k,l} \in I$ para $k \neq l$, $E_{k,k} - E_{l,l} \in I$. Aquí, nuevamente los $E_{i,j}$ denotan la base estándar de $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Fecha de entrega: 19 de Febrero de 2016.