Semestre 2016/2 Algebras de Lie y sus Representaciones

Christof Geiss
Daniel Labardini

Tarea 3

Ejercicio 9

Sea V un espacio vectorial sobre un campo k, $f \in \operatorname{End}_k(V)$ y $S \subset k$ sea el conjunto de los valores propios de f. Entonces

$$\operatorname{EigG}(f, \nu) := \{v \in V \mid (f - \nu \operatorname{Id}_V)^l v = 0 \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$$

es el subespacio propio generalizado de f para el valor propio ν. Recordemos que $f(\operatorname{EigG}(f, \nu)) \subset \operatorname{EigG}(f, \nu)$, y en caso k es algebraicamente cerrado $V = \oplus_{\nu \in S} \operatorname{EigG}(f, \nu)$. Demuestra, que si si k es algebraicamente cerrado, y $W \subset V$ es un subespacio de V con $f(W) \subset W$, entonces

$$W = \oplus_S (\operatorname{EigG}(f\mid_V, \nu) \cap W).$$

En particular, $\operatorname{EigG}(f\mid_W, \nu) = \operatorname{EigG}(f\mid_V, \nu) \cap W$.

Ejercicio 10

Sea k un campo algebraicamente cerrado con $\operatorname{char}(k) = 0$ y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente sobre k. Consideramos una representación V de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Para $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ consideramos

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \text{ para todo } x \in \mathfrak{g} \text{ existe un } n \in \mathbb{N} \text{ con } (x - \lambda(x) \operatorname{Id}_V)^n \cdot v = 0\}.$$

Este espacio propio simultaneo generalizado se llama espacio de peso generalizado de V para el peso λ. Demuestra que V es, como representación de $\mathfrak{g}$, suma directa de sus espacios de peso generalizados. Instrucciones:

- Utiliza el corolario del Teorema de Lie, que describe la estructura de las representaciones de un álgebra de Lie nilpotente, para identificar los espacios de peso generalizados. Concluya en particular que V es, como espacio vectorial, suma directa de sus espacios de peso generalizados.

- Demuestra que cada subespacio de peso generalizado V_λ es efectivamente una subrepresentación de V. Utiliza para esto la descripción de (a) y estudia subcocientes apropiados donde se puede aplicar el resultado del Ejercicio 7.

Ejercicio 11
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita.

(a) Sean $I_1, I_2, \ldots, I_r$ ideales simples de $\mathfrak{g}$ con $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$, y A un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Demuestra que la adición induce un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie: $I_1 \times \cdots \times I_r \times A \to \mathfrak{g}$.

(b) Si el homomorfismo de (a) es un isomorfismo, demuestra que los ideales de $\mathfrak{g}$ son precisamente de la forma $I_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus I_{\nu_r} \oplus V$ para un subsecuencia $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_r$ de $1, 2, \ldots, n$ y un subespacio V de A.

(c) Demuestra: Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita, entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(d) Si $\mathfrak{g}$ es reductiva, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, es decir cada álgebra de Lie reductiva admite una descomposición única en un producto de un álgebra de Lie semisimple y su centro.

Ejercicio 12

(a) Demuestra, que en términos de la base estándar (e, h, f) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ el operador de Casimir actúa sobre cualquier representación V como la expresión $C := (ef + fe)/4 + h^2/8 = fe/2 + h(h+2)/8$. Concluya, que C actúa sobre la representación simple de dimensión $n+1$ por el escalar $n(n+2)/8$.

(b) Demuestra que el operador de Casimir de un álgebra de Lie semisimple sobre los complejos actua sobre la representación adjunta como la identidad.

Fecha de entrega: 4 de Marzo de 2016.