Semestre 2016/2 — Algebras de Lie y sus Representaciones

Christof Geiss
Daniel Labardini

Tarea 9 - última

Ejercicio 32
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un campo k, y $U(\mathfrak{g})$ su envolvente universal. Denotamos con $\mu\colon U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})$ el mapeo lineal definido por la multiplicación en $U(\mathfrak{g})$, y por $\iota\colon k\to U(\mathfrak{g}), t\mapsto t\cdot 1_U$ el morfismo que define la estructura de k-álgebra sobre $U(\mathfrak{g})$. Claramente $\epsilon\circ\iota=\mathrm{Id}_k$. Recordamos que tenemos un homomorfismo de álgebras $\epsilon\colon U(\mathfrak{g})\to k$ definido por $\mathfrak{g}\to 0$. Demuestra:

(a) El mapeo lineal $\mathfrak{g}\to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g}), x\mapsto x\otimes 1+1\otimes x$ se puede extender de una única forma a un homomorfismo de álgebras asociativas $\delta\colon U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$.

(b) δ es coasociativo en el sentido que $(\delta\otimes\mathrm{Id}_U)\circ\delta=(\mathrm{Id}_U\otimes\delta)\circ\delta$ como homomorfismo de álgebras $U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$, y ϵ es la counidad para δ en el sentido que $(\mathrm{Id}_U\otimes\epsilon)\circ\delta=\mathrm{Id}_U=(\epsilon\otimes\mathrm{Id}_U)\circ\delta$.

(c) Tenemos un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}, x\mapsto -x$. Este mapeo se extiende a un isomorfismo de álgebras asociativas $S\colon U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}=U(\mathfrak{g}^{\mathrm{op}})$.

(d) $\mu\circ(S\otimes\mathrm{Id}_U)\circ\delta=\iota\circ\epsilon=\mu\circ(\mathrm{Id}_U\otimes S)\circ\delta$ como endomorfismos de $U(\mathfrak{g})$

Esto muestra que $U(\mathfrak{g})$ tiene una estructura de álgebra de Hopf.

Ejercicio 33
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ con $\Phi\subset\mathfrak{h}^*$ el sistema de raíces correspondiente, y $\Pi\subset\Phi$ una base del sistema de raíces. Para $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ denotamos con $\Delta(\lambda)$ el módulo de Verma con respecto a las selecciones arriba mencionadas.

(a) Sea $\lambda\in X^+$ y denotamos para $\alpha\in\Pi$ con $I(\alpha)$ la imagen de la inclusión $\Delta(s_\alpha\cdot\lambda)\hookrightarrow\Delta(\lambda)$. Demuestra que $\sum_{\alpha\in\Pi}I(\alpha)=\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$.

(b) Verifica en el caso $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ por cálculo directo que el módulo de Verma $\Delta(\lambda)$ es simple si y solamente si $\lambda(\alpha^\vee)\notin\mathbb{N}_0$ para nuestra selecciones estándar en esta caso (en particular $\alpha^\vee=\mathrm{diag}(1,-1)$).

Ejercicio 34
Con las mismas hipótesis y notaciones que en el Ejercicio 33 sea V una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.

(a) Demuestra: El conjunto de pesos $P(V) \subset X$ es *saturado* en el siguiente sentido: si $\lambda \in P(V)$ y $\alpha \in \Phi$ entonces $\lambda - i\alpha \in P(V)$ para todo entero i entre 0 y $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$. En particular, un conjunto saturado de pesos es estable bajo la acción del grupo de Weyl. Si V es simple, $P(V)$ tiene además un peso más alto $\lambda \in X^+$.

(b) Si Φ es un sistema de raíces irreducible, entonces $\Phi \cup \{0\}$ es saturado con un peso más alto.

(c) Si $P \subset X$ es saturado con un peso más alto $\lambda \in X^+$, entonces $\mu \in X^+$ pertenece a P si y solamente si $\mu \preceq \lambda$. Concluya, que para cada $\mu \in X^+$ existe un único conjunto saturado de pesos con peso más alto μ. *Pista:* Ejercicio 28 (c) y Humphreys 13.4.

Ejercicio 35
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un campo k y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un subálgebra de Lie. Para un representación V de $\mathfrak{g}$ decimos que $v \in V$ es $\mathfrak{a}$-finito si existe una $\mathfrak{a}$-subrepresentación U de V de dimensión finita con $v \in U$. Demuestra que los elementos $\mathfrak{a}$-finitos de V forman una $\mathfrak{g}$-subrepresentación de V.

Ejercicio 36
Sea E un espacio euclidiano con producto interior $(-,-)$ y $\Phi \subset E$ un sistema de raíces con una base $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Para una raíz $\alpha \in \Phi$ denotamos con $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ la coraíz correspondiente. Abreviamos $\langle \lambda, \alpha \rangle := (\lambda, \alpha^\vee)$ para $\lambda \in E$ y $\alpha \in \Phi$. Q denota la retícula de raíces y $X := \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in \Phi\}$ la retícula de pesos. Los ϖ_i con $\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$ son los pesos fundamentales. Un peso $\lambda \in X^+$ se llama *minúsculo* si $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $\alpha \in \Phi$.

(a) Demuestra que las siguientes afirmaciones sobre $\lambda \in X^+$ son equivalentes: (1) λ es minúsculo; (2) $\mu \in X^+$ con $\mu \preceq \lambda$ implica $\mu = \lambda$; (3) La órbita de μ bajo el grupo de Weyl es saturada.

(b) Suponiendo que Φ es irreducible, sea $\lambda \in X^+ \setminus \{0\}$ minúsculo. Demuestra que entonces $\lambda = \varpi_i$ con $i \in \{1, \dots, l\}$ en el caso A_l, $i = l$ en caso B_l, $i = 1$ en caso C_l, $i \in \{1, l-1, l\}$ en caso D_l, $i \in \{1, 6\}$ en caso E_6

y $i = 7$ en caso E_7 (enumeración de los vértices de los diagramas de Dynkin como en Humphreys). *Pista:* Utiliza la lista de raíces más altas largas y cortas de la página 66 en Humphreys.

(c) Demuestra que cada clase lateral del grupo fundamental X/Q contiene exactamente un peso minúsculo. *Pista:* Utiliza para una dirección el resultado de (b).

(d) Sea V una representación irreducible de un álgebra de Lie semisimple sobre los complejos. Si el peso más alto λ de V es minúsculo, demuestra que la dimensión de V es igual a la cardinalidad de la $\mathcal{W}$-orbita de λ.

Compara con el Ejercicio 13.13 de Humphreys.

Fecha de entrega: Viernes 13 de Mayo de 2016.