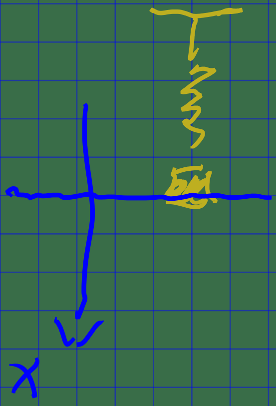
0. Introducción

conocido: ecuación lineal de oscilación:

$$x'' = -\frac{a}{mg} x$$

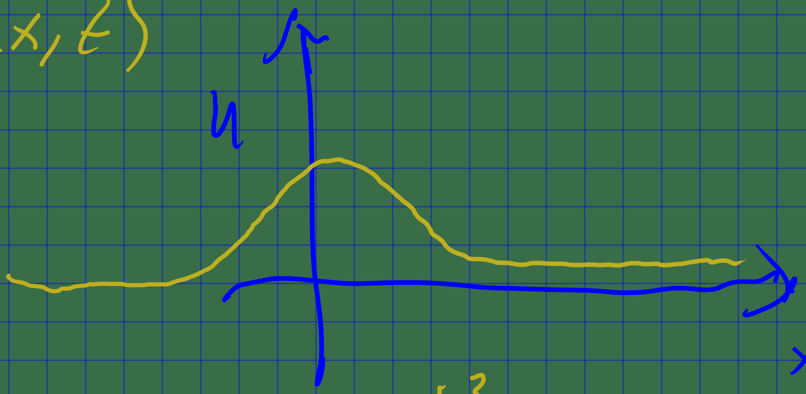


soluciones

$$x = A \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

Foco del curso es la ecuación Korteweg - de Vries (~1890) para ondas de agua que se propagan en un canal angosto y poco profundo

$u(x,t)$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x} = 0$$

Ansatz Onda viajera

$u(x,t) = f(x-ct)$

$\rightsquigarrow$ una primera solución es

$$u_1(x,t) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\delta)\right]$$

$$\mathrm{sech}(y) := \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

secante hiperbólico

$$= \frac{1}{\cosh(y)}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 1}}$ verificar esta solución!

Veremos que KdV tiene en efecto toda una serie de soluciones u_n ($n \in \mathbb{N}$) donde u_n depende de parametros

$c_1, c_2, \dots, c_n, \delta_1, \dots, \delta_n$

para $t \gg 0$ u_n se
ve como una superpos.
de soluciones de tipo u_n
pero para tiempos "pequeños"
pueden "chocar" y despues
retoman su forma y
quizas cambian de fase

ese tipo de soluciones
se llaman solitones,

Filosoficamente ese
comportamiento se origina
en el hecho que
la KdV representa
un sistema integrable
con una infinidad de
grados de libertad
y que al mismo tiempo
tiene una simetría
(oculta) muy alta

En mecánica clásica un sistema con f grados de libertad se describe con $2f$ coordenadas

$$\underbrace{p_1, \ldots, p_f,}_{\text{momenta}} \quad \underbrace{q_1, \ldots, q_f}_{\text{coord. de espacio}}$$

$$(*) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$H = H(p, q)$$

Se dice que $(*)$ es compl. integrable si existen f integrales primeras

$$F_1 = H, \ F_2, \ldots, F_f(p, q)$$

$$\{F_i, F_j\} = 0$$

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

y los F_i independ.

En este caso las sol.

se obtienen al resolver el sistema $F_i(p, q) = c_i$ para constantes c_i arbitrarias