1. La ecuación KdV y sus simetrías

Metas

- Diferentes nociones de simetría para ecuaciones
- Simetrías de KdV
- El formalismo de Lax para KdV

1.1. Grupos de simetrías

- Simetrías del círculo

$$C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$$

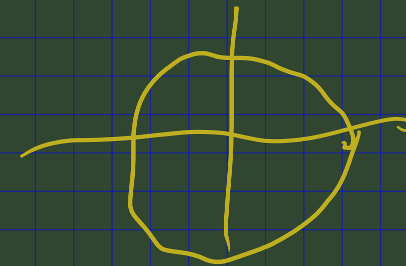
nos interesan simetrías de C_r que sean transformaciones lineales del plano $\mathbb{R}^2$

es decir que están dadas por matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_r$

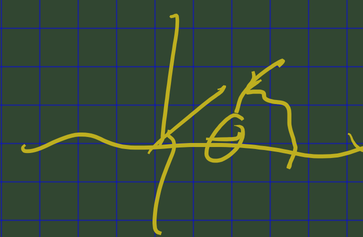
$\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in C_r$

Vemos que hay dos tipos de estas simetrías:



rotaciones:

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}\theta & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



reflexiones

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow \quad O_2(\mathbb{R})$

$O_2(\mathbb{R})$ es un grupo con las reglas de multiplicación

$$T(\theta_1)\,T(\theta_2) = T(\theta_1+\theta_2)$$

$$T(\theta_1)\,S(\theta_2) = S(\theta_2)\,T(-\theta_1)$$
$$= S(\theta_1+\theta_2)$$

$$S(\theta_1)\,S(\theta_2) = T(\theta_1-\theta_2)$$

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_r$ podemos definir

$$(1.6)\quad \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = T(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notamos que entonces

$$C_r = \left\{ \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Por otro lado

$$(1.7)\quad \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$$

La ecuación diferencial (1.7) determina la solución (1.6)

Podemos decir en otras palabras que el operador lineal

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es el generador infinitisomal del grupo de rotacions

$$\{ T(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$$

de hecho tenemos

$$T(\theta) = \exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\theta^2)$$

Más generalmente, si tenemos un grupo de 1-parámetro

$R : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ hom. de grupos

con

$$R(\theta) = \mathbb{1} + \theta \cdot X + O(\theta^2)$$

decimos que X es el generador infinitesimal de R

y escribimos

$$R(\theta) = \exp(\theta X)$$

En realidad nos interesan más transformaciones (inf.) de espacios de funciones

<u>Ejemplo</u> La rotación $T(\theta)$ induce una acción sobre "el" espacio de funciones g en dos variables x, y:

$$(T(\theta)g)(x,y) = g\left(\left(T(\theta)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t\right)$$

Al considerar funciones diferenciables f en dos variables podemos definir en nuestro caso

$$f^T(x,y;\theta) = T(\theta) f(x,y)$$

y considerar

(1.11')

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f^T(x,y,\theta) \stackrel{!}{=} \underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\text{gen. inf. de las rotaciones en funciones}} f^T$$

gen. inf. de las rotaciones en funciones

Si ahora consideramos la ecuación

$$(*) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - r\right) f(x,y) = 0$$

$$f^T(x,y;\theta) = f\big((\cos\theta)\cdot x + \operatorname{sen}(\theta)\cdot y,$$
$$-\operatorname{sen}(\theta)\, x + (\cos\theta)\, y\big)$$

$$\left.\frac{\partial f^T}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}\right)$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

El operador en (*) es invariante bajo las rotaciones es decir si f es solución de (*) entonces $T(\theta)f$ también lo es $\forall \theta$

El operador en $(*)$ también es invariante bajo traslaciones paralelas $(x,y) \mapsto (x-a, y-b)$. En funciones podemos expresar esto como

$$f(x+a,\, y+b) = \left(e^{a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}}\right) f$$

expansión de Taylor de f en (x,y).

Más adelante vamos a estudiar en situaciones similares varias álgebras de Lie (de operadores)

Abstractamente un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un campo K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) junto con un operador bilineal

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \text{(corchete)}$$

t.q.

- $[x,y] = -[y,x]$ (antisim.)
- $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$

$= 0$ $\uparrow$

id. de Jacobi

En muchos casos $\mathfrak{g}$ es dado por "operadores" y el corchete es el conmutador

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A$$

Ejemplo $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

las matrices $n \times n$ con el conmutador de matrices

En estos casos (si ignoramos problemas de convergencia) el conjunto

$$G := \{ \exp(x) \mid x \in \mathfrak{g} \}$$

es un grupo $\Rightarrow$ tenemos la formula de Baker - Campbell - Hausdorff

$$\exp(\theta X)\exp(\theta Y) =$$

$$\exp\left(\theta X + \theta Y + \frac{1}{2}\theta^2 [X,Y] + \frac{1}{12}\theta^3 [X-Y, [X,Y]] + \dots \right)$$

Obs. Si $\mathfrak{g}$ es de dim. finita sobre K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) entonces podemos realizar $\mathfrak{g}$ como un álgebra de Lie concreto de operadores lineas sobre un espacio vect. de dimensión finita por el teorema de Ado