1.2. Simetrías de KdV

Salvo reescalamiento de u, x, t podemos escribir la ecuación KdV como la siguiente ecuación de evolución:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}_{K(u)} \qquad (1.16)$$

K es un operador no lineal

- es el generador infinitésim

de la evolución en el tiempo de u.

Buscamos entre los operadores no triviales a simetrías de la KdV en el sentido de (1.11')

Más precisamente vamos a considerar funciones $u = u(x, t, s)$ con s un "tiempo" auxiliar y nuestra "simetría" será de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \hat{K}(u) \qquad (1.17)$$

con $\hat{K}(u)$ algún polinomio diferencial en u con respecto a x, es decir un polinomio en u, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{2x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ etc.

Por ejemplo

$$K(u) = u \cdot u_x + u_{3x}$$

Suponiendo que podemos solver (1.17) con el dato inicial $u_0 = U(x, t, s=0)$ una solución de (1.16) requerimos que también

$u_{\Delta s} = u(x, t, s = \Delta s)$ sea

también solución de KdV.

Si tratamos ahora s y t con el mismo derecho

$$\begin{tikzcd}
u(x, t=0, s=0) \arrow[r, "\hat{K}"] \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & u(x, t=0, s=\Delta s) \arrow[d, "K"] \\
u(x, t=\Delta t, s=0) \arrow[r, "\hat{K}"'] & u(x, t=\Delta t, s=\Delta s)
\end{tikzcd}$$

con $\Delta t, \Delta s \to 0$

obtenemos la condición fundamental de compatibilidad:

$$\boxed{(1.19) \quad \frac{\partial}{\partial s} K(u) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{K}(u)}$$

Es fácil ver que en nuestra situación no cualquier p.d. dif. $\hat{K}$ cumple esto

Por ejemplo $\hat{K}(u) = u^2$ falla:

$$\frac{\partial}{\partial s} K(u) = \frac{\partial}{\partial s}(u u_x + u_{3x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \hat{K}(u) = u^2$$

$$= u^2 \cdot u_x + u(\partial_x \partial_t u) + \partial_x^3(\partial_t u)$$

$$\stackrel{...}{=} 3u^2 u_x + 6 u_x u_{xx} + 2 u u_{3x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{K}(u) = \frac{\partial}{\partial t} u^2 = 2 u u_t$$

$$= 2u(u u_x + u_{3x})$$

Para buscar más sistemáticamente
por simetrías asignamos
(por razones que por ahora
no se explican)

asignamos a $u_{(nx)}$ el grado
$2+n$ y analizamos polinomios
diferenciales homogeneos
de un grado determinado
Por ejemplo K es homog.
de grado $5 = 2+3$

Vemos que la primera simetría interesante ocurre en grado 7

Podemos hacer el "Ansatz"

$$\hat{K}(u) = C_1 u^2 u_x + C_2 u u_{3x} + C_3 u_x u_{xx} + C_4 u_{5x}$$

Suponiendo $C_1 = 1$

obtenemos después de un cálculo bastante engorroso

$$\hat{K}(u) = u^2 u_x + 2\, u u_{3x} + 4\, u_x u_{xx} + \frac{6}{5}\, u_{5x}$$

es una simetría no triv. de nuestra KdV (1.16)

Un análisis más sistemático muestra que para cada grado impar hay esencialmente una simetría no trivial

para grados 3 y 5 solamente son los generadores infinitesim.

de traslación en el espacio y en el tiempo

1.3. El formalismo de Lax

Consideramos el operador dif.

$$(1.22) \qquad P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$$

$$\left(w \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u \cdot w \right)$$

con u una función en x

y la ecuación diferencial

$P w = k^2 w$ en $\mathbb{R}$

es decir que la función w es un vector propio de P para el valor propio k^2

Si $u \equiv 0 \rightsquigarrow w = e^{kx}$ es solución

Más generalmente podemos intentar un Ansatz

$$(1.23) \quad w = e^{kx}\left(w_0 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \cdots\right)$$

sin preocuparnos por convergencia

Suponiendo $w_0 \equiv 1$ los

w_j se pueden calcular

recursivamente por integración:

$$\underbrace{2\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_{j-1}}{\partial x} + u\, w_{j-1}}_{\text{“coeficiente” de } \frac{1}{z^{j-1}}} = 0$$

si sustituimos (1.23) en (1.22)

En el siguiente paso agregamos una dependencia del tiempo t

$u = u(x,t)$ y $w_j = w_j(x,t)$

y pedimos que w evolucione en el tiempo según

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B w \qquad (1.24)$$

para un polinomio diferencial

$$B = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2$$

Supongamos que tenemos una solución

$w_0 = w(x, t=0)$ de (1.22)

y nos preguntamos si

$w_{\Delta t} = w(x, t=\Delta t)$ sigue

cumpliendo (1.22) con la misma k

Para que eso es necesario

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Pw - k^2 w\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} w + P \frac{\partial w}{\partial t} - \hbar^2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Bw$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} w + PBw - BPw = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] \right) w = 0$$

en esta expresión observamos

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

y entonces

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B]\right) \text{ es}$$

una ecuación dif.

nada más en x (!)

que tiene una infinidad

de soluciones independientes

al variar k

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] = 0}$$