2. La jerarquía de KdV

2.1. Operadores pseudo diferenciales

Como ya vimos, para f una función y $n \in \mathbb{N}$ tenemos la identidad de operadores

$$\partial^n \circ f = \partial^n (f \cdot -)$$

$$= \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} (\partial^j f) \circ \partial^{n-j}$$

(regla de producto)

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j(j-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

- Si $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\binom{n}{j} = 0 \text{ si } j > n$$

- Esta definición de $\binom{n}{j}$ permite también $n \in -\mathbb{N}$

Esto nos indica como se comportaría ∂^n para $n \in -\mathbb{N}$

Técnicamente operadores seudo dif. se pueden introducir con la transformación de Fourier $\mathcal{F}$ y la observación clásica

$$\partial_x^n f = \mathcal{F}^{-1}(x^n \cdot \mathcal{F} f)$$

Aquí tratamos operadores ∂^{-n} de una manera abstracta y solamente veremos como actúan sobre ciertas funciones.

Un ejemplo de este tratamiento es la construcción de la raíz cuadrada del operador de Schrödinger

$\partial^2 + u$ y hacemos el "Ansatz"

$$X = \partial + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \partial^{-n}$$

y calculamos

$$X^2 = \left(\partial + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \partial^{-n}\right) \circ \left(\partial + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \partial^{-n}\right)$$

$$= \partial^2 + \sum_{n \geq 1} \left((\partial f_n)\partial^{-n} + f_n \partial^{1-n}\right)$$

$$+ \sum_{n \geq 1} f_n \partial^{1-n}$$

$$+ \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ l \geq 0}} \binom{-n}{l} f_n (\partial^l f_m) \partial^{-m-n-l}$$

Si igualamos

$$X^2 = \partial^2 + u$$

podemos determinar los f_n recursivamente:

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \tfrac{1}{2} u \partial^{-1} - \frac{1}{4} u_x \partial^{-2} + \frac{u_{xx} - u^2}{8} \partial^{-3} + \cdots$$

Ahora aplicamos cómo actúa el operador

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \partial^{\alpha - j}$$

para algún $\alpha \in \mathbb{Z}$

sobre "funciones"

(2.6) $$w = z^{\beta} e^{zx}\left(w_0 + \frac{w_1}{z} + \frac{w_2}{z^2} + \dots\right)$$

(del tipo de vector propio del operador de Schrödinger)

En una primera instancia parece sensato definir

$$\partial^n e^{zx} := z^n e^{zx}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ (!)$$

y por consecuencia

$$L(z^{\beta} e^{zx}) = z^{\alpha+\beta} e^{zx} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n z^{-n}$$

Con esto en mente podemos reescribir

$$(2.6') = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j \partial^{-j}\right)}_{=:M} e^{zx}$$

y podemos definir la acción de L sobre w como

$$Lw = L(Me^{zx}) = (L\circ M)(e^{zx})$$

2.2 Ecuaciones KdV superiores

Si $M = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \partial^{n-l}$ $(n \in \mathbb{N})$

entonces definimos

$$M_+ := \sum_{l=0}^{n} g_l \partial^{n-l}$$

un operador dif propio

y $M_- := M - M_+$

Ej 2.2 Regresamos al operador de Schrödinger $P = \partial^2 + u$ como en la discusión del Ej. 2.1

Podemos calcular

$$P^{3/2} = P \cdot P^{1/2}$$

(de grado 3) y observamos que

$$\left(P^{3/2}\right)_+ = \partial^3 + \frac{3}{2} u \partial + \frac{3}{4} u' = B$$

de la pareja de Lax!!

Esto nos motiva a definir más generalmente

$$(2.10) \qquad B_\ell := \left((\partial^2 + u)^{\ell/2} \right)_+$$

y considerar la pareja de Lax (P, B_ℓ)

(Si $\ell \in 2\mathbb{N}$ entonces $B_\ell = P^{\ell/2}$ y conmuta con P),

- Si $\ell \equiv 1 \pmod 2$ entonces

$$(2.11)\quad \underbrace{[P, B_e]}_{\text{operador dif. propio}} = \underbrace{\left[\tilde{P}, (\tilde{B}^{ek})\right]}_{\text{seudo op. dif de grado} \leq 2-1-1=0}$$

conmutador

(Ejercicio)

Por lo tanto (2.11) es un operador diferencial de grado 0, mas precisamente un polinomio diferencial c.v. a $\acute{X}$ en u

Por eso escribimos

$$[P, B_e] = K_e(u)$$

polinomio diferencial K_e

y tiene sentido de escribir la forma de Lax

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [P, B_e]$$ es

equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_e(u)$$

(solamente interesante para $\ell = 3, 5, 7, \ldots$,

porque $K_2, K_4, \ldots \equiv 0$

Para $\ell = 3$ recuperamos

KdV y los otros

son las ecuaciones KdV

superiores.