2,3 Una familia infinita de simetrías que conmutan

Seguimos con $P = \partial^2 + u$ y fijamos una familia infinita de variables

$x_1, x_3, x_5, \ldots$, $u = u(x_1, x_3, \ldots)$

y consideramos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x_\ell} = K_\ell(u) = -\left[P, (P^{\ell/2})_+\right]$$

con $\ell = 1, 3, 5, \ldots$

en particular

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_1} \qquad x_1 = h$$

$$x_3 = t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \underbrace{\frac{3}{2} u\, u_x + \frac{1}{4} u_{3x},}_{K_3(u)}$$

...

Veremos que todos los K_j's son mutuamente compatibles en el sentido de sec. 1, en particular los K_5, K_7, K_9, ..., son simetrías del operador K_3

Prop. Para todo $i, j \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} K_i(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} K_j(u).$$

En particular que para $i = 3$ y $j = 5, 7, \dots$ los K_j son simetrías del operador de evolución de la eqn. KdV. Mas generalmente significa que la evolución de u en los "tiempos" x_i y x_j es independiente del orden.

Dem. Por definición tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -[P, (P^{i/2})_+] = K_i(u)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\left((P^{j/2})_+\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} P^{j/2}\right)_+$$

$$= -\left([P^{j/2}, (P^{i/2})_+]\right)_+ \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} K_j(u) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[P, (P^{j/2})_+\right]$$

$$\overset{\text{prod}}{=} -\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}, (P^{j/2})_+\right] - \left[P, \frac{\partial}{\partial x_i}(P^{j/2})_+\right]$$

(2.14) $$\overset{(*)}{=} \left[\left[P, (P^{i/2})_+\right], (P^{j/2})_+\right] + \left[P, \left(\left[P^{j/2}, (P^{i/2})_+\right]\right)_+\right]$$

$$\overset{(!)}{=} \left[\left[\underset{a}{P}, \underset{b}{(P^{i/2})_+}\right], \underset{c}{(P^{j/2})_+}\right] + \left[\underset{a}{P}, \left[\underset{c}{(P^{j/2})_+}, \underset{b}{(P^{i/2})_+}\right]\right] - \left[P, \left(\left[(P^{j/2})_+, P^{i/2}\right]\right)_+\right]$$

$[a,[b,c]] + [a,[c,b]] = [[a,c],b] \Leftrightarrow$ Jacobi

$$= \left[\left[\underset{a}{P}, \underset{c}{(P^{j/2})_+}\right], \underset{b}{(P^{i/2})_+}\right] + \left[P, \left(\left[P^{i/2}, (P^{j/2})_+\right]\right)_+\right]$$

$$\overset{(2.14)}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} K_i(u) \qquad (j \leftrightarrow i)$$

Para (!) calculamos:

$$\left(\left[P^{j/2}, (P^{i/2})_+\right]\right)_+ = \left(\left[(P^{j/2})_+, (P^{i/2})_+\right]\right)_+ + \left(\left[(P^{j/2})_-, (P^{i/2})_+\right]\right)_+$$

$$= \left[(P^{j/2})_+, (P^{i/2})_+\right] + \left(\left[(P^{j/2})_-, P^{i/2}\right]\right)_+ - \left(\left[(P^{j/2})_-, (P^{i/2})_-\right]\right)_+$$

$$= \left(\left[(P^{j/2})_+, (P^{i/2})_+\right]\right) + \left(\left[P^{j/2}, P^{i/2}\right]\right)_+ - \left(\left[(P^{j/2})_+, P^{i/2}\right]\right)_+$$

$\square$

En resumen, un $P = \partial^2 + u$

$u = u(x_1, x_3, x_5, \dots)$ y el sistema de ecuaciones lineales

$$P\, w = k^2 w \qquad w = w(\underset{x}{x_1}, \underset{t}{x_3}, \dots)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = B_i w \equiv (P^{i/2})_+ w$$

la compatibilidad de estas condiciones (en el sentido de Lax) implica las ecuaciones de la jerarquía de KdV:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = [(P^{i/2})_+, P] = K_i(u)$$

y los polinomios diferenciales (c.r. a x) K_i son mutuamente compatibles en el sentido

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K_j(u) = \frac{\partial}{\partial x_j} K_i(u)$$

$$\forall\ i, j \in \{1, 3, 5, \ldots\}$$

2.4 La jerarquía KP

KP = Kadomtsev - Petviashvili

En lugar de la raíz $(\partial^2+u)^{1/2}$ estudiamos ahora un operador pseudo diferencial "general" de grado 1:

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} u_j \partial^{-j}$$

$$u_j = u_j(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

⇒ nos interesa el problema de vectores propios

(2.17) $\quad L w = k w$

y como en el caso KdV intentamos el "Ansatz"

$$w = e^{\xi(x,k)}\left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots\right)$$

con $\xi(x,k) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j$

Notamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{\xi(x,k)} = k^j e^{\xi(x,k)}$$

Por eso podemos reescribir

$$w = \underbrace{\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j \, \partial^{-j}\right)}_{M} e^{\xi(x,z)} \qquad (2.22)$$

$$\partial = \partial_x$$

Como en el caso KdV estudiamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \underbrace{\left(L^{j}\right)_+}_{B_j} w \qquad (2.20)$$

con el mismo yoga de compatibilidad obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = [B_j, L]\ !$$

Regresamo a nuestro problema de vectores pro ios (2.17) y con nuestro Ansatz (2.22

$$v = M e^{\xi(x,z)} \quad \text{obtemos}$$

$$L \circ M e^{\xi(x,z)} = z M e^{\xi(x,z)}$$
$$= M \partial e^{\xi(x,z)} \quad | M^{-1}$$

$$(M^{-1} L M) e^{\xi(x,z)} = \partial e^{\xi(x,z)}$$

variando k vemos que eso implica

$$L = M J M^{-1}$$

eso significa que los u_i's están determinados por los w_i's (y viceversa)

Veremos al final de la Sec. 3 que si τ es una función

$$\tau(x_1, x_2, \dots)$$

que cumple la siguiente cond. de residuos formales:

$$\operatorname{res}_{z=0}\left(e^{\xi(t'-t)}\,\tau(t-[z^{-1}])\,\tau(t'+[z^{-1}])\,dz \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \oint \cdots \frac{dz}{2\pi i} = 0$$

$$[z^{-1}] = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{2z^2}, \frac{1}{3z^3}, \dots \right)$$

$$t = (t_1, t_2, t_3, \dots), \quad t' = (t_1', t_2', \dots)$$

y la condición dice que si escribimos el integrando como una serie de Laurent en z, entonces el coeficiente de

$\frac{1}{z}$ es 0.

ENTONCES formalmente

$$w = \frac{\tau(x - [z^{-1}])}{\tau} e^{\xi(x,z)} \quad (¡!)$$

y tal w cumple las cond.

$$Lw = kw \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x_j} = (L^j)_+ w$$

de la jerarquía de KP

además en este caso también

se pueden extraer de

τ los w_j, por ejemplo

$$w_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \log \tau = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \Big/ \tau$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \log \tau \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_1} \log \tau - \frac{\partial}{\partial x_2} \log \tau \right)$$

ó $\quad u_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1} \log \tau$

Además $u = u_1$ tiene que cumplir las ecuaciones originales de KP:

$$\frac{3}{4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2}\,u\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_3}\right)$$