3. Ecuación de Hirota y Operadores de Vértice

3.1. La derivada de Hirota

Para f, g funciones (analíticas), en una variable x podemos expresar por definición la expansión de Taylor de

$$f(x+\varepsilon)\, g(x-\varepsilon) = f(x)g(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(D_x^j f \cdot g\right) \varepsilon^j,$$

Entonces los D_x^j son operadores bilineales y tenemos

$$D_x^1 f \cdot g = \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$D_x^n f \cdot g = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\partial^{n-j}}{\partial x^{n-j}} f \, \frac{\partial^j}{\partial x^j} g$$

Otra forma de expresarlo es

$$D_x^n \, f\cdot g = (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^n f(x_1)\, g(x_2) \Big|_{x_1=x_2=x}$$

Necesitamos el mismo concepto para funciones en varias variables. En este caso las derivadas de Hirota quedan definidas por ejemplo

$$f(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2)\, g(x_1-\varepsilon_1, x_2-\varepsilon_2) = e^{\varepsilon_1 D_1 + \varepsilon_2 D_2}(f\cdot g)$$

expansión de Taylor

$$= f(x)\,g(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\varepsilon_1 D_1 + \varepsilon_2 D_1)^j \,(f\cdot g)$$

Ver también el Ej. 3.2!

Entonces tenemos por ejemplo

$$\boxed{D_{x_1} D_{x_2} f\cdot g = f_{x_1 x_2}\, g - f_{x_1}\, g_{x_2} - f_{x_2}\, g_{x_1} + f\, g_{x_1 x_2}}$$

Para nuestras aplicaciones las siguientes fórmulas son muy importantes

$$\boxed{\frac{1}{2f^2} D_x^2 f\cdot f = \partial_x^2 \log f} = \partial_x\left(\frac{\partial_x f}{f}\right)$$

$$\|$$

$$\frac{(\partial_x^2 f) f - 2(\partial_x f)^2 + f(\partial_x^2 f)}{2f^2} = \frac{(\partial_x^2 f) f - (\partial_x f)^2}{f^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2f^2} D_x^4 f\cdot f = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\log f + 6\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log f\right)^2}$$

$$\|$$

$$\left(\frac{1}{2f^2} D_x^2 f\cdot f\right)^2$$

Estas 3 formulas nos permiten de reescribir la ecuación KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx}$$

en terminos de τ que esta definido por $u = 2\partial_x^2 \log\tau$

y las derivadas de Hirota:

$$2\partial_t\partial_x^2 \log\tau = 6(\partial_x^2\log\tau)(\partial_x^3\log\tau) + \frac{1}{2}\partial_x^5\log\tau$$

$\cdot 4$ y $\int(-)dx$

$$\Longrightarrow$$

$$8\partial_t\partial_x\log\tau = 3(2\partial_x^2\log\tau)^2 + 2\partial_x^4\log\tau$$

con nuestras formulas esto es equivalente a

$$\Longleftrightarrow \frac{8\left[(\partial_t\partial_x \tau)\tau - \partial_t\tau\,\partial_x\tau\right]}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} D_x^4\, \tau\cdot\tau$$

$$\parallel$$

$$\frac{4}{\tau} D_t D_x\, \tau\cdot\tau \qquad = \frac{1}{\tau^2} D^4\, \tau\cdot\tau$$

$$\Longrightarrow \left(4 D_t D_x - D_x^4\right) \tau\cdot\tau = 0 \qquad (3.2)$$

"ecuación de Hirota"

En lo que sigue consideramos

$\tau = \tau(x_1, x_2, \dots)$ ~ $D_{x_i} = D_i$

y vamos a considerar un poco más general ecuaciones de la forma

$$P(D) \equiv P(D_1, D_2, \dots)\ \tau \cdot \tau \quad = 0$$

donde P es un polinomio en los D_i's

En este contexto también usamos la notación $P(-D) = P(-D_1, -D_2, \dots)$

y las siguientes observaciones son útiles

$$P(D)\, f \cdot g = P(-D)\, g \cdot f$$

$$P(D)\, 1 \cdot f = P(-D)\, f$$

$$P(D)\, e^{px} \cdot e^{qx} = P(p-q)\, e^{(p+q)x}$$

En particular si P es impar en el sentido $P(-D) = -P(D)$ entonces

$$P(D)\, f \cdot f = P(-D)\, f \cdot f = -P(D)\, f \cdot f = 0$$

Por es suficiente estudiar el caso cuando P es "par" i.e. $P(-D) = P(D)$.

Además vamos a suponer siempre $P(0) = 0$

Entonces $\tau \equiv 1$ es una solución.

y intentamos una expansión

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2)$$

Entonces obtenemos

$$P(D)\,\tau\cdot\tau = P(D)\big(1\cdot 1 + \varepsilon(1\cdot f_1 + f_1\cdot 1)\big) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 0 + 2\varepsilon\, P(\partial) f_1 + O(\varepsilon^2)$$

porque P es par

$\Rightarrow$ La condición a f_1 es $\boxed{P(D) f_1 = 0}$

Esto nos motiva a tomar

$(k_1, k_2, \dots)$ de números reales con

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots) = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

$$\Rightarrow P(D) f_1 = \underbrace{P(k_1, k_2, \dots)}_{0} f_1$$

Curiosamente

$$\tau = 1 + \varepsilon e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

es una solución exacta de

$$P[D]\, \tau \cdot \tau \quad \text{si} \quad P(k_1, k_2, \dots) = 0$$

Porque en efecto

$$(1+\varepsilon e^{\underline{k}\cdot\underline{x}})\cdot(1+\varepsilon e^{\underline{k}\cdot\underline{x}})$$

$$= \underbrace{1\cdot 1}_{0} + \underbrace{\varepsilon 1\cdot e^{\underline{k}\cdot\underline{x}}}_{0} + \underbrace{\varepsilon e^{\underline{k}\cdot\underline{x}}\cdot 1}_{0} + \varepsilon^2 e^{\underline{k}x}\cdot e^{\underline{k}x}$$

$$0 = \varepsilon^2 \overset{P}{\underbrace{P(\underline{k}-\underline{k})}_{0}}\, e^{2\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

<u>Ejemplo</u> Para la ecuación de Hirota que corresponde a KdV

$$P(D) = 4D_tD_x - D_x^4 \quad \text{tenemos}$$

para cada $\underline{k}\in\mathbb{R}$

$$4(2\kappa^3)(2\kappa) - (2\kappa)^4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P(2\kappa, 2\kappa^4) = 0$$

$$\tau = 1 + c\, e^{2\kappa x + 2\kappa^3 t}$$

cumple la ecuación de Hirota

y $\partial_x^2 \log(\tau)$ es nuestra primera solución de la KdV clásica en términos de sech!

Regresando a nuestro problema de encontrar aproximaciones de primer orden

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2)$$

de soluciones a una ecuación de Hirota $P(D)\tau\cdot\tau = 0$

vemos que igual podemos fijar

fijar n soluciones

$$\underline{k}^{(j)} = (k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots) \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

con $P(\underline{k}^{(j)}) = 0$

y constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$

para intentar

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{\sum_i k_i^{(j)} x_i}$$

también da una solución en

primer orden ya que

$P(\partial) f_1 = 0$.

Estas observaciones nos motivan a decir que una solución exacta τ de $P(D)\,\tau\cdot\tau = 0$ que es un <u>polinomio</u> en n exponenciales $e^{\sum_i f_i^{(j)} x_i}$ (diferentes) se llama una <u>solución de n solitones</u>

Vemos ahora que esta propuesta tiene mucho sentido:

Primero vemos que para <u>todo</u> P (para con $P(0)=0$) la ecuación de Hirota $P(D)\,\tau\cdot\tau$ tiene soluciones de 2 solitones

En general <u>no</u> existen soluciones de n solitones para $n \geq 3$, sin embargo esto sí sucede para nuestro KdV

$$4D_t D_x - D_x^4$$

con soluciones explícitas!

$\longrightarrow$ 3.2

<u>Prop.</u> Sea P un polinomio par con $P(0)=0$ y

$$\mathbf{k}^{(j)} = \left(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots\right) \quad \text{para } j=1,2$$

ceros de $P(\mathbf{k}^{(1)}) = 0 = P(\mathbf{k}^{(2)}) = 0$ diferentes y c_1, c_2 constantes

Entonces con

$$f_1 = c_1 e^{\xi(\mathbf{x}, \mathbf{k}^{(1)})} + c_2 e^{\xi(\mathbf{x}, \mathbf{k}^{(2)})}$$

$$\text{y } f_2 = -\frac{P(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{k}^{(2)})}{P(\mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)})} c_1 c_2 \underbrace{e^{\xi(x, \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)})}}_{e^{\xi(x,\mathbf{k}^{(1)})} e^{\xi(x,\mathbf{k}^{(2)})}}$$

la expresión

$$\tau = 1 + f_1 + f_2$$

es una

solución exacta !

$$\left(\xi(\underline{x}, \underline{z}) = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots \right)$$

<u>Dem</u> Ejercicio 3.0 :-)