3.2 KdV n-Solitones

Vamos a presentar los n-Solitones para KdV en el lenguaje de τ-funciónes en el contexto de la jerarquía KdV con una infinidad de variables.

Fijamos parametros $c_1, \dots, c_n$ $(\in \mathbb{R}_+)$ y parametros $k_1, k_2, \dots, k_n$ $(\in \mathbb{R}^*)$

En lugar de x y t tomamos una familia infinita de variables

$$\begin{array}{ccc} x_1, & x_3, & x_5, \dots \\ \| & \| & \\ x & t & \end{array}$$

$$\xi(x, z) = \sum_{j=0}^{\ell} x_{2j+1} z^{2j+1}$$

$$\xi_i = 2\,\xi(x, z_i) = \xi(x, z_i) - \xi(x, -z_i)$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$a_{i,i'} := \frac{(z_i - z_{i'})^2}{(z_i + z_{i'})^2} \qquad i, i' \in I$$

Prop Con la notación de arriba

$$\tau_n(x_1, x_3, \dots) :=$$

$$(3.8) \quad \sum_{J \in \mathcal{P}(I)} \Big(\prod_{i \in J} c_i \Big) \Big(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{i,i'} \Big) \exp\Big(\sum_{i \in J} \xi_i \Big)$$

es la solución de n-solitones de

$$(4 D_1 D_3 - D_1^4)\, \tau \cdot \tau \quad (!)$$

<u>Ejemplo</u> $n = 3$

$$\tau_3 = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_3 e^{\xi_3}$$

$$c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1} e^{\xi_2} + c_{13} a_{13} e^{\xi_1} e^{\xi_3}$$

$$+ c_2 c_3 a_{23} e^{\xi_2} e^{\xi_3} + c_1 c_2 c_3 a_{12} a_{13} a_{23} \cdot e^{\xi_1} e^{\xi_2} e^{\xi_3}$$

(Ejercicio: Verificar que es una solución de KdV)

Observación

Ya que escribimos los τ_n en el lenguaje de la jerarquía de KdV nos podemos preguntar si

$$u_n(x_1, x_3, \dots) := \partial^2_{x_1} \log \tau_n(x_1, \dots,)$$

cumple las ecuaciones superiores de KdV

$$\partial_{x_i} u_n = K_i(u_n) \quad i = 3, 5, 7, \dots$$

y cómo se verán estas ecuaciones en el lenguaje de τ y ecuaciones de Hirota es decir ecuaciones

$$P_i(D)\, \tau_n \cdot \tau_n = 0$$

La primera observación es que por ejemplo en este sentido P_5 no solamente depende de D_1 y D_5 sino también de D_3

Luego históricamente se trataba más bien de encontrar <u>todos</u> los polinomios ~~de~~ P con

$$P(D)\,\tau_n \cdot \tau_n = 0$$

Para eso resulta conveniente asignar a D_{2j+1} el "orden" $2j+1$ y buscar polinomios homogeneos de grado n con esta asignación de peso.

En este sentido el KdV

$$P = 4x_1x_3 - x_1^4$$

homogeneo de grado 4

o se puede verificar que

$$\left(D_1^6 - 20 D_1^3 D_3 - 80 D_3^2 + 144 D_1 D_3\right) \tau_n \cdot \tau_n = 0$$

homogeneo de grado 6

3.3 Operadores de Vértice

Buscamos operadores X (transf. infinit.) X de $P = 4x_1x_3 - x_1^4$ tal que

$$e^{\varepsilon X}\tau_n = \tau_{n+1}$$

Se propone para un parametro $z \in \mathbb{R}^*$

$$X(z) = \exp\left(2\sum_{j=0}^{\infty} z^{2j+1}x_{2j+1}\right)$$

$$\times \exp\left(-2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)z^{2j+1}}\partial_{2j+1}\right)$$

si aplicamos $X(\varepsilon)$ a una función (analítica) $f(x_1, x_3, x_5, \dots)$

$$X(\varepsilon) f = \exp\left(2 \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j+1} x_{2j+1}\right) \cdot f\left(x_1 - \frac{2}{\varepsilon}, x_3 - \frac{2}{3\varepsilon^3}, \dots\right)$$

$$\exp(a \partial_x) = 1 + a\partial_x + \frac{1}{2} a^2 \partial_x^2 + \dots$$

$$f(x+a) \underset{\substack{\text{expn}\\ \text{Taylor}}}{=} f(x) + a f'(x) + \frac{1}{2} a^2 f''(x) + \dots$$

Para el siguiente Lema importante es fundamental que tengamos una infinidad de variables

Lema Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*$ entonces

$$X(z_1)\,X(z_2) = \frac{(z_1 - z_2)}{(z_1 + z_2)^2}\exp\left(2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty} z_j^{2i+1} x_{2i+1}\right)$$

$$\times \exp\left(-2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)\,z_j^{2i+1}}\,\partial_{2j+1}\right)$$

Dem Sea $A(z) = -2\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial_{2j+1}}{(2j+1)\,z^{2j+1}}$

$$B(z) = 2\sum_{j=0}^{\infty} z^{2j+1}\,x_{2j+1}$$

así que $X(z) = e^{B(z)}\,e^{A(z)}$

y el Lema afirma

$$e^{B(z_1)} e^{A(z_1)} e^{B(z_2)} e^{A(z_2)}$$

$$= \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} e^{A(z_1)} e^{A(z_2)} e^{B(z_1)} e^{B(z_2)}$$

$$e^{B(z_1)} e^{B(z_2)} = e^{B(z_1) + B(z_2)}$$

por eso tenemos que demostrar

$$e^{A(z_1)} e^{B(z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} e^{B(z_2)} e^{A(z_1)}$$

Y para demostrar esto usamos la siguiente observación:

Si $[A,B] = c \cdot id \qquad (c \in \mathbb{R})$

entonces $e^A e^B = e^C e^B e^A$

(Ej 3.3 + Pista!)

$$[A(z_1), B(z_2)] = -4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{2j+1} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2j+1}$$

$$\uparrow$$

$$[x_i, \partial_j] = \delta_{ij}$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)^j - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^j \right)$$

$$= \underbrace{-\log\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \log\left(1-\frac{z_2}{z_1}\right)^2}_{\alpha}$$

$$\exp(\alpha) = \frac{(z_1-z_2)^2}{(z_1+z_2)^2}$$

$\square$

Obs:

$$e^{X(q)} = 1 + X(q)$$

Idea:

$$e^{X(q_1)} e^{X(q_2)} \cdots e^{X(q_n)} \cdot 1$$

$$= \tau_n \; !$$