Vamos a ver que todo lo de la clase anterior se generaliza naturalmente al contexto de la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvili (KP):

$$\frac{3}{4}\partial_2^2 u = \partial_x \left(\partial_3 u - \frac{3}{4} u \partial_1 u - \frac{1}{4}\partial_1^3 u\right)$$

Se convierte bajo la sustitución

$$u = \partial_1^2 \log \tau \quad \text{en}$$

$$\left(D_1^4 + 3 D_2^2 - 4 D_1 D_3\right)\tau \cdot \tau = 0$$

(Ej. 3.0!)

Resumen:

$P_{KdV} = -4X_1X_3 + X_1^4$

Soluciones de P_{KdV}

$(2k, 0, 2k^3) \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$P_{KdV}(D)\, \tau \cdot \tau$

Ansatz $\tau = 1 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2)$

$\rightsquigarrow P_{KdV}(\partial) f_1 = 0$ sugiere

$f_1 = c \; \exp(2k x_1 + 2k^3 x_3 + \dots)$

es solución exacta $\forall k, c$

Con la notación

$\xi(\underline{x}, k) := \sum_{k=1}^{\infty} x_i k^i$ y

$$\frac{P(2k_1 - 2k_2, 0, 2k_1^3 - 2k_2^3)}{P(2k_1 + 2k_2, 0, 2k_1^3 + 2k_2^3)}$$

$$= \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = a(k_1, k_2)$$

$P_{KP} = X_1^4 + 3X_2^2 - 4X_1X_3$

Soluciones de $P_{KP} = 0$:

$(p - q, p^2 - q^2, p^3 - q^3)$

con $p, q \in \mathbb{R}$

con $p = -q$ recuperamos las sol. de P_{KdV}

Intentamos

$\tau + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2)$

con $P(\partial) f_1 = 0$

$f_1 = c \exp((p-q)x_1 + (p^2 - q^2)x_2 + \dots$

y nos aventuramos a intentar lo mismo que KdV

$$\frac{P(\underline{x}(p_1, q_1) - x(p_2, q_2))}{P(x(p_1, q_1) + x(p_2, q_2))}$$

y parametros

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_+$

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}^*$ con $k_i - k_j \neq 0$, $k_i + k_j \neq 0$ $\forall i \neq j$

$$\xi_i = \xi(x, k_i) - \xi(x, -k_i)$$
$$= 2x_1 k_i + 2x_3 k_i^3 + \dots$$

podemos construir soluciones de n-solitones

$$\tau_n(x_1, x_3, \dots) = \sum_{J \subset I} \Big(\prod_{i \in J} c_i\Big)\Big(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{ii'}\Big) e^{\sum_{i \in J} \xi_i}$$

$I = \{1, \dots, n\}$

$a_{ii'} = a(k_i, k_{i'})$

Operadores de vértice

$$e^{c_n X(k_n)} \tau_n = \tau_{n+1}$$

$$= \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)}$$
$$= a(p_1, q_1; p_2, q_2)$$

Con parametros

$c_1, c_2, \dots, c_n$

$p_1, \dots, p_n$

$q_1, \dots, q_n$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} (p_i^j - q_i^j) x_i$$
$$= \xi(x, p_i) - \xi(x, q_i)$$

$$a_{i,i'} = a(p_i, q_i, p_{i'}, q_{i'})$$

$$\tau_n(x_1, x_2, \dots) \qquad (3.49)$$
$$= \sum_{J \subset I} \Big(\prod_{e \in J} c_e\Big)\Big(\prod_{\substack{e, e' \in J \\ e < e'}} a_{e,e'}\Big)$$

$$X(z) = \overbrace{\exp\left(\xi(x,z) - \xi(x-z)\right)}^{B(z)}$$

$$\times \underbrace{\exp\left(2 \sum_{j \in 2\mathbb{N}_0+1} \frac{1}{z^{j} j z} \partial_j\right)}_{A(z)}$$

con

$$X(z_1)X(z_2) = a(z_1,z_2)$$
$$\times\ e^{B(z_1)+B(z_2)}\, e^{A(z_1)+A(z_2)}$$

en part $X(z)^2 = 0$.

$e^{\widetilde{\partial}_{(-)}} \xi\ z$

Operadores al vértice

$$X(p,q) = \exp^{\xi(x,p) - \xi(x,q)}$$

$$\cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^{-j} - q^{-j}}{j} \partial_j\right)$$

3.4 La identidad bilineal

<u>Teorema</u> (Identidad bilineal)

Sea $\tau = \tau_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ como en (3.19)

entonces vale (3.20):

$$0 = \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i}\, e^{\xi(x,z) - \xi(x',z)} \times \tau\left(x_1 - \frac{1}{z}, x_2 - \frac{1}{2z^2}, \ldots\right) \tau\left(x_1' + \frac{1}{z}, x_2' + \frac{1}{2z^2}, \ldots\right)}_{f(z)}$$

$= 0$ para todo $x = (x_1, x_2, \ldots)$
$x' = (x_1', x_2', \ldots)$

Donde $\oint \frac{dz}{2\pi i} f(z)$ significa el integral de contorno sobre un círculo con centro 0 y radio suficientemente grande en el plano $\mathbb{C}$.

En vista del teorema de residuo expandimos $f(z)$ en una serie de Laurent $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j z^j$ y tomamos el coeficiente $f_{-1} \rightsquigarrow \mathrm{Res}\big|_{z=0} f$

Si $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}$

con $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ diferentes 1 a 1 y g es una función entera entonces

$$\operatorname{Res} f\Big|_{z=0} = \sum_{j=0}^{m} \frac{g(z_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (z_i - z_j)}$$

El cálculo clave es:

$$\exp\Big(\sum_{\ell\in J} \xi_j\Big)\Big(x_1 - \frac{1}{z},\ x_2 - \frac{1}{2z^2},\ x_3 - \frac{1}{3z^3}, \dots\Big)$$

$$= \Big(\prod_{\ell\in J} \frac{z-p_\ell}{z-q_\ell}\Big) \exp\Big(\sum_{j\in J} \xi_j\Big)$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ell^j}{j z^j} = \ln\Big(1 - \frac{\ell}{z}\Big)$$

Similarmente

$$\exp\Big(\sum_{l\in J} \xi_j'\Big)\Big(x_1' + \frac{1}{z},\ x_2' + \frac{1}{2z^2},\ \dots\Big)$$

$$= \prod_{l\in J}\left(\frac{z-q_l}{z-p_l}\right)\exp\Big(\sum_{j\in L}\xi_j'\Big)$$

En vista de (3.19) nuestro integrando f tiene polos simples en los p_i's y q_j's.

y podemos calcular el residuo en uno de estos polos, digamos q_i:

$$\tau = \sum_{J \subset I} \Big(\prod_{\ell \in J} c_\ell \Big) \Big(\prod_{\substack{\ell, \ell' \in J \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \Big) \exp \Big(\sum_{\ell \in J} \xi_\ell \Big)$$

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{e^{\xi(x,z) - \xi(x',z)} \, \tau\Big(x_1 - \frac{1}{z}, x_2 - \frac{1}{2z^2}, \dots\Big) \, \tau\Big(x_1' + \frac{1}{z}, x_2' + \frac{1}{2z^2}, \dots\Big)}_{f(z)}$$

$$\operatorname{Res} f \big|_{z = q_i} = e^{\xi(x, q_i) - \xi(x', q_i)} \times \Big(\sum_{\substack{i \in J \subset I \\ \text{polo!}}} \Big(\prod_{\ell \in J} c_\ell \Big) \Big(\prod_{\substack{\ell, \ell' \in J \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \Big) \Big((q_i - p_i) \prod_{\ell \in J \setminus \{i\}} \frac{q_i - p_\ell}{q_i - q_\ell} \exp \Big(\sum_{\ell \in J} \xi_\ell \Big) \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{\substack{i \notin J' \subset I \\ \neq 0}} \Big(\prod_{\ell \in J'} c_\ell \Big) \Big(\sum_{\substack{\ell, \ell' \in J' \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \Big) \Big(\prod_{\ell \in J'} \frac{q_i - q_\ell}{q_i - p_\ell} \Big) \exp \Big(\sum_{\ell \in J'} \xi'_\ell \Big)$$

$$= c_i (q_i - p_i) \, e^{\xi(x, p_i) - \xi(x, q_i)} \Big(\sum_{i \notin J \subset I} \Big(\prod_{\ell \in J} c_\ell \Big) \Big(\prod_{\substack{\ell, \ell' \in J \\ \ell < \ell'}} a_{\ell \ell'} \Big) \prod_{\ell \in J} \frac{p_i - p_\ell}{p_i - q_\ell} \Big) \exp \Big(\sum_{\ell \in J} \xi_\ell \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{i \in J' \subset I} \Big(\prod_{\ell \in J'} c_\ell \Big) \Big(\prod_{\substack{\ell, \ell' \in J' \\ \ell < \ell'}} a_{\ell, \ell'} \Big) \Big(\prod_{\ell \in J'} \frac{q_i - q_\ell}{q_i - p_\ell} \Big) \exp \Big(\sum_{\ell \in J'} \xi_\ell \Big)$$

$$= - \operatorname{Res} f \big|_{z = p_i} \quad \square$$

Podemos usar la identidad bilineal para demostrar que las τ_n efectivamente son soluciones de la jerarquía de KP en cualquiera de los siguientes dos sentidos

(i) con $w(z) = \dfrac{\tau(x_1 - 1/z, x_2 - \frac{1}{2}z^2, \ldots)}{\tau(x_1, x_2, \ldots)} e^{\xi(x,z)}$

$$= \left(1 + \frac{w_1}{z} + \frac{w_2}{z^2} + \ldots\right) e^{\xi(x,z)}$$

$$= \underbrace{\left(1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} \ldots\right)}_{M} e^{\xi(x,z)}$$

con $L = M \partial M^{-1}$ teníamos

$L\, w(z) = z\, w(z)$ (final de 2)

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \underbrace{(L^k)_+}_{B_k} w(k) \quad ?$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_k} + [L, B_j] = 0$$

(ii) Un cierto sistema de ec. bilineal $P_j(D)\,\tau\cdot\tau = 0$

(Ejercicio ingl. P_{KP})