4.1. El álgebra de operadores para Bosones

Vamos a trabajar con el anillo de polinomios.

$$\mathbb{C}[\underline{x}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$$

Tiene como $\mathbb{C}$-base los monomios (finitos) en las variables $x_1, x_2, \dots$

En particular, cada polinomio solamente involucra un número finito de variables.

Acordemos que la variable x_k tenga peso k

por ejemplo $|x_1 x_3| = 4 = |x_4|$

Sobre estos polinomios actúan los operadores

$$(\alpha_n f)(x) := \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

$$y \quad \alpha_n^* f(x) = (x_n f)(x)$$

Estos operadores cumplen las reglas conocidas de conmutación:

$$[\alpha_m, \alpha_n] = 0 \quad , \quad [\alpha_m^*, \alpha_n^*] = 0$$

$$y \quad [\alpha_m, \alpha_n^*] = \delta_{m,n} \cdot 1$$

Entonces podemos considerar abstractamente el anillo $\mathcal{B}$ (de operadores dif. polinomiales)

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbb{C}\langle \alpha_i, \alpha_j^* \mid i,j \in \mathbb{N}_0 \rangle}{\langle [\alpha_i, \alpha_j],\ [\alpha_i^*, \alpha_j^*],\ [\alpha_i, \alpha_j^*] - 1 \rangle}$$

Es fácil ver que $\mathcal{B}$ tiene una $\mathbb{C}$-base que consiste de monomios de la forma

$$(a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \cdots\cdots a_1^{b_1} a_2^{b_2} a_3^{b_3} \cdots$$

(monomios finitos)

Por ejemplo

$$[a_2, a_2^*] = 1$$

$$a_1^* \underbrace{a_2 \, a_2^*}_{} a_1 =$$

$$= a_1^*(a_2^* a_2)a_1 + a_1^* \, 1 \, a_1$$

$[a_2, a_1] = 1$

$$= a_1^* a_2^* a_1 a_2 + a_1^* a_1$$

y obviamente un producto de dos monomios (en forma "normal") es combinación lineal de el. en forma normal por las rel.

La acción de B sobre $\mathbb{C}[x]$ por $\alpha_n \longmapsto \partial_n$, $\alpha_n^* \longmapsto x_n$ la podemos interpretar como un homomorfismo (inyectivo!) de $\mathbb{C}$-álgebras asociativas

$$\rho : \mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$$

$$\alpha_n \longmapsto \partial_n$$

$$\alpha_n^* \longmapsto x_n.$$

y tenemos así una representación canónica del álgebra de bosones $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{C}[X]$ (visto como esp. vect.)

en este contexto $\mathbb{C}[X]$ se llama el <u>espacio de Fock</u>

$\mathcal{B}$ se llama al álgebra de Heisenberg

4.2. Fermiones

Vamos a definir el álgebra $\mathcal{A}$ de Clifford de una vez en términos de generadores y relaciones y para eso ocupamos el anti-conmutador

$$[x, y]_+ = xy + yx$$

Def

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbb{C}\langle \psi_n, \psi_m^* \mid_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \rangle}{\langle [\psi_m, \psi_n]_+, [\psi_m^*, \psi_n^*], [\psi_m^*, \psi_n] = \delta_{m+n,0} \rangle}$$

se llama el álgebra de Clifford

Ojo $\psi_n^2 = 0 = (\psi_n^*)^2 \quad \forall n$

$$0 = [\psi_n, \psi_n]_+ = \psi_n \psi_n + \psi_n \psi_n$$
$$= 2\psi_n$$

$\Rightarrow \psi_n = 0$ porque $\mathrm{char}(\mathbb{C}) = 0$.

$$\mathbb{Z}+\frac{1}{2} = \ldots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Similar al caso de Bosones podemos escribir, usando las relaciones de anti-conmutación, en una forma estándar:

$$\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi^*_{n_1}\psi^*_{n_2}\cdots\psi^*_{n_s}$$

con

$$\left.\begin{array}{l} m_1 < m_2 < \cdots < m_r \\ n_1 < n_2 < \cdots < n_s \end{array}\right\} \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$$

4. Espacios de Fock para Bosones y Fermiones

4.1. Ele