Recordemos el álgebra de Clifford

$$\mathcal{A} := \frac{\mathbb{C}\langle \psi_i, \psi_i^* \mid i \in \mathbb{Z}+\tfrac{1}{2} \rangle}{\langle [\psi_m,\psi_n]_+,\ [\psi_m^*,\psi_n^*]_+,\ [\psi_m^*,\psi_n]_+ = \delta_{m+n,0} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{Z}+1/2 \rangle}$$

$$[a,b]_+ := ab + ba$$

Ojo $\psi_n^2 = 0 = (\psi_m^*)^2$

base

$$\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi_{n_1}^*\cdots\psi_{n_s}^*$$

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_r$$

y $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$ $\qquad$ $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{A}$

4.3. El espacio de Fock fermiónico

Consideramos diagramas de Maya que son por definición cadenas doblemente infinitas de fichas de Go

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \cdots & & &
\end{array}$$

tales que para posiciones $<< 0$ todas las fichas son "blancas" $\circ$ y para posiciones $>> 0$ todas las fichas son "negras" $\bullet$

Estos diagramas los podemos codificar en sucesiones que recuerdan las posiciones de las fichas negras:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$$

con $m_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ y

$$m_{i+1} = m_i + 1 \quad \text{para } i \gg 0$$

y escribimos $\underset{\sim}{m} = (m_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$

Sea $\mathcal{F}$ el $\mathbb{C}$-esp. vectorial que tiene una base $|\underset{\sim}{m}\rangle$ donde los $\underset{\sim}{m} = (m_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$

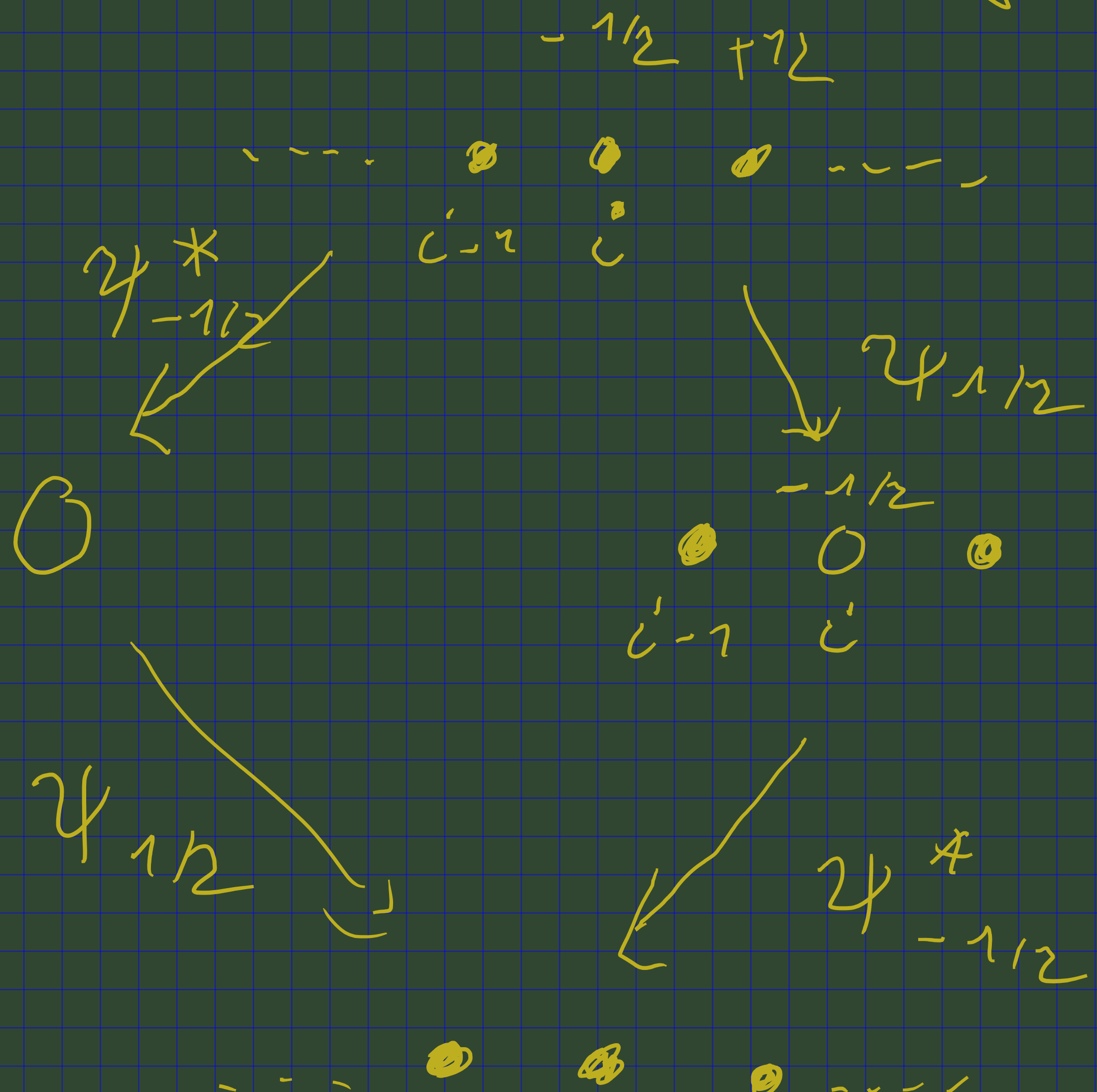
representan los diagramas de Maya, y explicamos cómo actúan los fermiones ψ_i y ψ_i^* sobre esta base:

$$\psi_n |\underline{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} (\ldots m_{i-1}, m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots) & \text{si } m_i = -n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\psi_n^* |\underline{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^{i} \ldots m_i, n, m_{i+1} \ldots & \text{si } m_i < n < m_{i+1} \text{ para algún } i \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Vale la verificar que estás

Operaciones efectivamente cumplen las relaciones del álgebra de Clifford



$(-1)^{i-1}$

$$1 = (-1)^{i-1}(-1)^{i+1}$$

Dividimos los fermiones en dos clases

$\{\psi_n, \psi_n^* \mid n < 0\}$ operadores de creación

y $\{\psi_n, \psi_n^* \mid n > 0\}$ operadores de aniquilación

todos los operadores de creación anticonmutan entre ellos

y lo mismo para los op. de aniquilación.

Además consideramos el diagrama de Maya $|vac\rangle$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & -1/2 & 1/2 & 3/2 & & & \\ \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \end{array}$$

$\longleftrightarrow$ ~~m~~ $(1/2, 3/2, 5/2, \ldots)$

Observamos que

(1) $\psi_n^{(*)}|vac\rangle\ 0$ si $n > 0$

por eso el nombre de aniquilación

(2) $\mathcal{F} = \mathcal{A}\cdot|vac\rangle$

más precisamente, los diag. de Maya se obtienen al aplicar a $|vac\rangle$

los operadores de la forma

$$\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi^*_{n_1}\psi^*_{n_2}\cdots\psi^*_{n_s}$$

con $m_1 < m_2 < \cdots < m_r < 0$

y $n_1 < n_2 < \cdots < n_s < 0$

(Los ψ_{m_i} con $m_i < 0$ "crean" fichas blancas en posiciones positivas

y los $\psi^*_{n_i}$ con $n_i < 0$

crear fichas negativas en posiciones negativas.

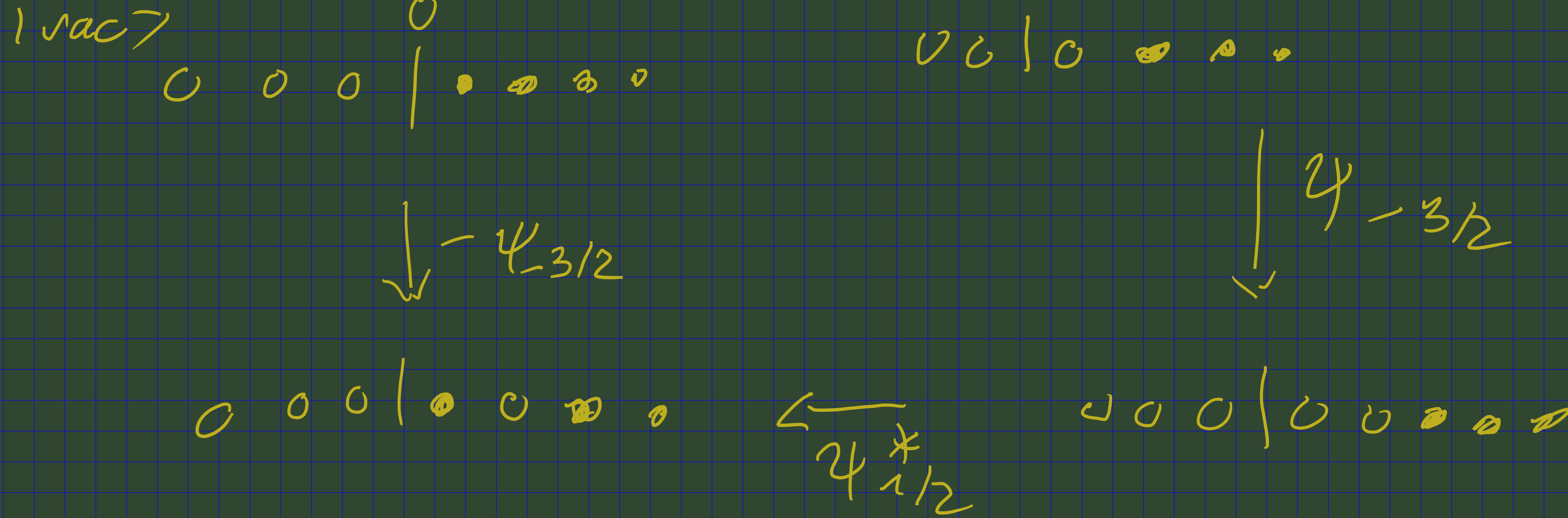
Ej: Es interesante pensar en un estado "virtual" de vacío total que tiene puras ficha blancas

con esto tendríamos

$$\psi_n |\Omega\rangle = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}$$

entonces tendríamos también

$$|vac\rangle = \psi^*_{1/2}\, \psi^*_{3/2}\, \psi^*_{5/2} \cdots |\Omega\rangle$$



4.4. Dualidad, carga y energía

Obs. Sea K un campo y A un K-algebra es decir que tenemos un homomorfismo unitario de anillos $\rho : K \longrightarrow A$ t.q.

$$\rho(\lambda) \cdot a = a \cdot \rho(\lambda) \quad \forall a \in A, \ \lambda \in K.$$

En este caso A es un K-esp. vect y la mult. es K-bilineal, y cada A-módulo es también un K-esp. vect,

En esta situación

$$\mathrm{Hom}_K(-, K) : A\text{-Mod} \to \mathrm{Mod}\text{-}A$$

un funtor contravariante de módulo

a izquierda a módulos a derecha /A

Si $f \in \mathrm{Hom}_K(M, K)$ entonces

$$(f \cdot a)(m) := f(a \cdot m)$$

define efectivamente una estructura de A-módulo a derecha sobre $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ si M era un A-módulo a izquierda.

Ojo: Si $\dim_K M = \infty$ entonces el $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ es muy grande

Bajo ciertas condiciones de finitud
por ejemplo si

$A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ un algebra

graduada: $A_{d_1} \circ A_{d_2} \subset A_{d_1+d_2}$

y $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ graduado

$A_{d_1} \circ M_{d_2} \subset M_{d_1+d_2}$

y las comp. graduadas son
de dim finita ($\dim_K M_d < \infty$ $\forall d$)

entonces podemos construir el

<u>dual graduado</u>

$$M^* := \bigoplus_d \underbrace{\mathrm{Hom}(M_d, K)}_{M^*_{-d}}$$

entonces M^* es un modulo graduado a derecha y

$M^{**} \cong M$

Esto es implícito en la construcción del espacio dual de Fock fermiónico $\mathfrak{F}^*$.

El espacio de Fock "dual" tiene una base que también está parametrizada por los diagramas de Maya, pero ahora vamos a recordar las posiciones de las fichas blancas:

$$(\ldots\ldots, n_3, n_2, n_1)$$

con los $n_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ y la condición $n_{i+1} = n_i - 1$ $\forall i \gg 0$

y $n_{i+1} < n_i \quad \forall i$

se define una acción a derecha sobre $F^* = \bigoplus \mathbb{C}\langle \underline{n}|$

$\underline{n}$ suc. como

$$\langle \underline{n} | \psi_m = \begin{cases} (-1)^i \quad n_{i-1} < m < n_{i+1} & \text{si } n_{i-1} < m < n_{i+1} \text{ para algún } i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$\cancel{-n_i}$

$$\langle \underline{n} | \psi_m^* = \begin{cases} (-1)^{i-1} \quad \ldots, n_{i-1}, \;{}_{|}\; n_{i+1} & \text{si } m = -n_i \text{ para algún } i \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El estado $\langle vac|$ dual corresponde al mismo diag. de Maya

$$\circ\ \circ\ \circ \cdots \circ \overset{0}{|} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

que esta codificado por la sucesión

$$\left(\ldots\ldots, -\tfrac{5}{2}, \underset{n_2}{-\tfrac{3}{2}}, \underset{n_1}{-\tfrac{1}{2}}\right)$$

observamos:

$$\langle vac|\psi_n^{(*)} = 0 \quad \forall\, n < 0$$

es decir que

$\langle vac |$ es aniquilado por los operadores de creación !

(2) $F^* = \langle vac | \cdot \mathcal{A}$

mas precisamente recuperamos los diag. de Maya si multiplicamos con monomios de la forma

$$\psi_{m_1} \psi_{m_2} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_1} \cdots \psi^*_{n_s}$$

con

$$0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_r$$
$$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_s .$$