4.4. Cont.

Base de $\mathcal{F}$: $|\underline{m}\rangle$

con $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots\dots)$ $\quad m_1 < m_2 < \dots$

Base de $\mathcal{F}^*$ $\quad \langle \underline{n}|$

con $\underline{n} = (\dots\dots n_3, n_2, n_1)$

$\dots n_3 < n_2 < n_1$

Tenemos un acoplamiento bilineal

$\mathcal{F}^* \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}$

que está definido en términos de las dos bases como sigue:

$$\langle \underline{n} | \underline{m} \rangle := \delta_{m_1+n_1,0}\, \delta_{m_2+n_2,0} \cdots$$

en otras palabras

$$\langle \underline{n} | \underline{m} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{n} = (\ldots, -m_2, -m_1) \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

en esto caso denotamos $\langle \underline{n}$ con $(|\underline{m}\rangle)^\vee$

gráficamente el básico dual $(|\underline{m}\rangle)^\vee$ de $|\underline{m}\rangle$ se obtiene al cambiar (blanco $\leftrightarrow$ negro) después reflejamos en 0.

Ejercicio: Si pensamos en la acción de $\psi_n^{(*)} \circ$ sobre $\tilde{F}$ en términos de la base $(|\underline{m}\rangle)_{\ldots}$ y lo comparamos con la acción $\circ \psi_n^{(*)}$ sobre $\tilde{F}^*$ en términos de la base dual $(|m\rangle)^{\vee}_{\ldots}$ entonces una matriz es la transpuesta de la otra!

Además observamos que para todo básico $\langle \underline{n}|$ de $\tilde{F}^*$, $a \in \mathbb{C}$

y $|\underline{m}\rangle \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\underbrace{(\langle \underline{n}| a)}_{\in \mathcal{F}^*} \underbrace{|\underline{m}\rangle}_{\in \mathcal{F}} = \langle \underline{n}| \underbrace{(a |\underline{m}\rangle)}_{\in \mathcal{F}}$$

$$\equiv \langle \underline{n} | a | \underline{m} \rangle$$

(Comparar con la notación bra-ket de Dirac

Definimos ahora la carga y energía para los Fermiones:

Fermiones	ψ_n	ψ_n^*
carga	1	-1
energía	$-n$	$-n$

y definimos la energía y carga de un monomio en los ψ_n's y ψ_n^*'s como la suma de los valores de cada factor

está bien definido en vista de las reglas de anti-conmut. en A. Si acordamos que $c(1) = 0 = E(1)$

carga   energía

y con esto $\mathcal{A}$ se convierte en un álgebra graduada

$\mathcal{A}_e^{(d)}$ = envolvente lineal de todos los monomios con carga e y energía d.

$$\mathcal{A}_e^{(d)} \cdot \mathcal{A}_{e'}^{(d')} \subseteq \mathcal{A}_{e+e'}^{(d+d')}$$

Observamos

$$\psi_m \psi_{-m}^* = 1 - \psi_{-m}^* \psi_m$$

carga y energía 0

carga y energía 0

En términos de la base estándar de A observamos tenemos explícitamente:

$$\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_r}\psi_{n_1}^*\psi_{n_2}^*\cdots\psi_{n_s}^*$$

carga $r-s$

energía $-(m_1+m_2+\dots+m_r+n_1+n_2+\dots+n_s)$

Definimos también carga y energía para el espacio de Fock $\mathcal{F}$ y su dual $\mathcal{F}^*$:

$$c(\,a|vac\rangle\,) =: c(a)$$
$$E(\,a|vac\rangle\,) =: E(a)$$

si a es un monomio con
$$a|vac\rangle \neq 0$$

(por ejemplo tomamos nada más los monomios formados por operadores de creación.)

checar : si $c(a) = 0 = E(a)$
y $a \cdot \underline{\ell}\rangle \neq 0$

entonces $c(a|\underline{b}>) = c(b>)$!
$E(a|\underline{b}>) = E(b>)$

lo mismo para $\mathfrak{F}^*$ donde

a grosso modo definimos

$c(<vac|a) = c(a)$
$E(<vac|a) = E(a)$

si $<vac|a \neq 0$

y a un monomio

Con estas definiciones
$\mathfrak{F}_e^{(d)}$ = la envolvente lineal

de los $|\underline{m}\rangle$ con

$$e(|\underline{m}\rangle) = \ell$$

$$E(|\underline{m}\rangle) = d$$

entonces

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\ell, d} \tilde{\mathcal{F}}_{\ell}^{(d)}$$

es un $\mathcal{A}$ - módulo graduado:

$$\left(\mathcal{A}_{\ell}^{(d)} \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\ell'}^{(d')} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{\ell+\ell'}^{(d+d')} \right.$$

y $\tilde{\mathcal{F}}_{\ell}^{(d)}$ sí es de dim finita

para todo ℓ y d!

(porque se está generando

a partir de los operadores de creación que todos tienen energía positiva!

$\rightsquigarrow$ el dual graduado tiene sentido!

Lo mismo aplica para

$$\mathcal{F}^* = \bigoplus_{e,d} (\tilde{\mathcal{F}}^*)_e^{(d)}$$

Observamos que

$$\langle (\tilde{\mathcal{F}}^*)_e^{(d)} \mid \tilde{\mathcal{F}}_{e'}^{(d')} \rangle = 0$$

excepto $e + e' = 0$ y $d + d' = 0$!

porque

$$c\left((\underline{m}\rangle)^{\vee}\right) = -c(|\underline{m}\rangle)$$

$$E\left((\underline{m}\rangle)^{\vee}\right) = -E(|\underline{m}\rangle)$$

Denotamos para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ el diag. de Maya $|\ell\rangle$:

$$\circ \ \circ \cdots \circ \overset{\ell}{\Big|} \bullet \ \bullet \cdots \bullet$$

Por ejemplo $|vac\rangle = |0\rangle$

estado de vacío trasladado por ℓ,

$$|\ell\rangle = (\ell + 1/2,\ \ell + 3/2,\ \ell + 5/2, \dots)$$

y lo mismo para

$\langle \ell |$

el mismo diagrama de Maya pero

$= (\ldots, \ell - 3/2, \ell - 1/2)$

en la notación dual

$$|\ell\rangle = \begin{cases} \psi^*_{\ell+1/2} \cdots \psi^*_{-3/2} \psi^*_{-1/2} |vac\rangle & \text{si } \ell < 0 \\ |vac\rangle & \text{si } \ell = 0 \\ \psi_{-\ell+1/2} \cdots \psi_{-3/2} \psi_{-1/2} |vac\rangle & \text{si } \ell > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c(|\ell\rangle) = \ell$$

$$E(|\ell\rangle) = \ell^2/2$$

$$\langle \ell | \stackrel{!}{=} \begin{cases} \langle vac | \psi^*_{1/2} \psi^*_{3/2} \cdots \psi^*_{-\ell-1/2} & si\ \ell < 0 \\ \langle vac | & si\ \ell = 0 \\ \langle vac | \psi_{1/2} \psi_{3/2} \cdots \psi_{\ell-1/2} & si\ \ell > 0 \end{cases}$$

- ψ_ℓ crea una ficha blanca en la posición ℓ (si es posible)

$$c(\langle \ell |) = +\ell$$

$$\epsilon(\langle \ell |) = -\ell^2/2$$

Ejercicio quién es

- $(|\ell\rangle)^\vee$?

- Si en un diag. de Maya $|\underline{m}\rangle$

$0 < b_1 < b_2 < \dots < b_r$

son las posiciones de las fichas <u>blancas</u> mayores a 0 y

$n_s < \dots < n_2 < n_1 < 0$

las posiciones de las fichas negras menores a 0

entonces $c(|\underline{m}\rangle) = r - s$ y

$$E(|\underline{m}\rangle) = \sum_{i=0}^{r} b_i - \sum_{j=0}^{s} n_j \quad !$$