5. La correspondencia entre Bosones y Fermiones

5.1. Funciones generadoras

Sea z una variable formal

Introducimos las funciones generadoras fermiónicas

$$\psi(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n z^{-n-1/2}$$

$$\psi^*(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n^* z^{-n-1/2}$$

Exemples

$$\langle \psi(p)\, \psi(q) \rangle =$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}+1/2} \langle \psi_m \psi_n^* \rangle \, p^{-m-1/2} \, q^{-n-1/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1} \, q^{n} = \frac{1}{p-q}$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \right) = \frac{1}{p} \, \frac{1}{1 - q/p}$$

estrictamente para esta identidad tenemos que suponer que $|q| < |p|$

Mas generalmente, por el teorema Wick (Ver Ej. 4.3) tenemos

$$\langle \psi(p_1)\psi(p_2)\dots\psi(p_n)\psi^*(q_1)\dots\psi^*(q_n)\rangle$$

$$= \det\left(\langle \psi(p_i)\psi^*(q_j)\rangle \Big|_{i,j=1,\dots,n} \right)$$

$$= \det\left(\frac{1}{p_i - q_j} \Big|_{i,j=1,\dots,n} \right)$$

$$\text{Cauchy} = \frac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n} (p_i - p_j)(q_j - q_i)}{\displaystyle\prod_{1\le i,j\le n} (p_i - q_j)}$$

5.2. El producto normal

Cuando trabajamos por ejemplo con el anillo de operadores diferenciales (polinomiales)

$$\mathbb{C}\langle x_i, \partial_i \mid i\in\mathbb{N}_+\rangle \Big/ \left\langle \begin{array}{c}[x_i, x_j],\ [\partial_i, \partial_j] \\ {[\partial_i, x_j]} = \delta_{ij}\end{array}\right.$$

normalmente escribimos los operadores de la forma

$$\sum_{k} p_k(\underline{x})\, q_k(\partial)$$

porque así es más fácil de evaluar si en una suma de este tipo el grado de los operadores diferenciales incrementa incluso una suma infinita da un resultado bien definido sobre cada polinomio

Un ejemplo de esto es el "operador de Euler"

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n \, x_n \, \partial_n$$

y su evaluación en cada polinomio homogeneo f de grado n $\in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \ldots]$

$(\deg x_n = n)$

nos da

$$Ef = nf$$

Pero si hubiéramos escrito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_n x_n$$

ya da problemas si lo aplicamos a la función 1:

$$\partial_n(x_n \cdot 1) = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \partial_n x_n\right) 1$$

estaría sumando una infinidad de veces 1

Otro ejemplo es el operador

$$\exp(\partial_x) = 1 + \partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 + \cdots$$

está bien definido sobre cualquier polinomio

el efecto sobre un polinomio es la traslación por 1 en la dirección x_n:

$$(\exp(\partial_x))\, x^2 = \left(1 + \partial_x + \tfrac{1}{2}\partial_x^2\right) x^2$$

$$= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Esto motiva (a los físicos) la siguiente definición:

$$:\,?\,: \quad \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, \partial_1, \partial_2, \ldots \rangle \longrightarrow \mathcal{R}$$

que es

- $\mathbb{C}$ - lineal
- $:1: \; = 1$
- $:x_i x_j: \; = \; :x_j x_i:$

  $:\partial_i \partial_j: \; = \; :\partial_i \partial_j:$

  $:\partial_i x_j: \; = \; :x_j \partial_i:$
- $:p\, \partial_i: \; = \; :p:\, \partial_x$

$$:x_j\, p: \;=\; x_j :p:$$

en particular $:x_n \partial_n: = :\partial_n x_n:$

$$= x_n \partial_n$$

En particular esto nos permite escribir ciertas sumas infinitas de operadores diferenciales (si el grado de la diferenciación se incrementa) que sean definidas sobre todos los polinomios.

Necesitamos algo similar para nuestro álgebra de Clifford $\mathcal{A}$ y su acción sobre el espacio de Fock fermiónico $\mathcal{F}$:

$$:?:_{\mathcal{F}} \quad \mathbb{C}\langle \psi_n, \psi_n^* \mid_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \rangle \longrightarrow \mathcal{A}$$

- es $\mathbb{C}$-lineal
- $:1:_{\mathcal{F}} = 1$
- $:\psi_i^{(*)} \psi_j^{(*)}:_{\mathcal{F}} = -:\psi_j^{(*)} \psi_i^{(*)}:_{\mathcal{F}}$

monomios en los generadores antic.

mutan

$$:\psi_i^{(*)} \cdot m:_F = \psi_i^{(*)} :m:_F$$ si $i<0$

$$:m \cdot \psi_j^{(*)}:_F = :m:_F \, \psi_j^{(*)}$$ si $j>0$

(op. de creación se saca hacia la izquierda el op. de anihilación hacia la derecha

Por ejemplo

$$:\psi_m \psi_n^*: = \begin{cases} \psi_m \psi_n^* & \text{si } m<0 \\ & 0 \text{ si } n>0 \\ -\psi_n^* \psi_m & \text{si } m>0 \\ & 0 \text{ si } n<0 \end{cases}$$

$$\stackrel{!}{=} \psi_m \psi_n^* - \langle \psi_m \psi_n^* \rangle$$

$\psi_m \psi_n^* = -\psi_n^* \psi_m + \delta_{m+n,0} \Rightarrow \langle \psi_n \psi_m^* \rangle = \delta_{n+m,0}\, \Theta(n<0)$

La idea es nuevamente que es una forma cómoda de escribir ciertas sumas infinitas de elementos de $\mathcal{C}\ell$ que tengan sentido cuando se aplican a un elemento de $\mathcal{F}$.

5.2 Complemento:

Recordamos: $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/2} A^{(m)}$ graduado por energía

$\mathbb{Z}/2 = \{\dots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots\}$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigoplus_{m\in \mathbb{N}_0/2} \tilde{\mathcal{F}}^{(m)}$$ es un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda graduado ($\mathcal{A}^{(m)}\cdot\tilde{\mathcal{F}}^{(m')} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{(m+m')}$

$\tilde{\mathcal{F}}^{(m)} = 0$ para $m<0$!

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{F}}) = \{a\in\mathcal{A} \mid af = 0 \ \forall\ f\in\tilde{\mathcal{F}}\} = 0 \quad (!)$$

queremos extender la acción de $\mathcal{A}$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}$ a ciertas sumas infinitas de elementos de $\mathcal{A}$

Para eso seguimos una procedura estándar!

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(\leq m)} := \bigoplus_{\substack{j\in\mathbb{N}_0/2\\ j\leq m}} \tilde{\mathcal{F}}^{(j)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{C}|vac\rangle = \tilde{\mathcal{F}}^{(\leq 0)} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{(\leq 1/2)} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{(\leq 1)} \subseteq \dots \subseteq \dots \tilde{\mathcal{F}}$$

$$, \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0/2} \tilde{\mathcal{F}}^{(\leq j)} = \tilde{\mathcal{F}}$$

$$\mathfrak{U}_m := \mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}\left(\tilde{\mathcal{F}}^{(\leq m)}\right)$$

familia de ideales a izquierda $\mathcal{A}$ con

$$\mathfrak{U}_0 \supseteq \mathfrak{U}_1 \supseteq \mathfrak{U}_2 \supseteq \dots \supseteq 0 \qquad \bigcap \mathfrak{U}_m = \mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$$

$\mathfrak{m}_m \supseteq A^{(<m)} = A^{(m-1/2)} \oplus A^{(m-1)} \oplus \cdots$

definimos a $\bar{A}$ como la completación de A c.r. a la topología $\underline{\mathfrak{m}\text{-ádica}}$

i.e. decimos que una sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de A es una <u>sucesión de Cauchy</u> si para cada $\ell \in \mathbb{N}$ existe un $i_\ell \in \mathbb{N}$ t.q.

$$a_i - a_j \in \mathfrak{m}_\ell \quad \text{si } i, j \geq i_\ell$$

dos suc. $(a_i)_i$ y $(b_i)_i$ son equiv si

$$(a_i - b_i)_i \longrightarrow 0$$

$A \subset \bar{A}$ todas las clases de equiv. de suc. de Cauchy

$\rightsquigarrow$ si $a_i \in \mathfrak{m}_i$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ existe en $\bar{A}$ (suc. de Cauchy)

$\bar{A}$ es un álgebra!

Ejemplo mas sencillo

$\tilde{\mathcal{F}} = \mathbb{C}[x]$, $\mathcal{A} = \mathbb{C}[\partial] \simeq$ anillo de pol. actúa sobre $\mathcal{F}$ por derivación

$\tilde{\mathcal{F}}(\leq \ell)$ = pol. de grado $\leq \ell$

$\mathfrak{U}_\ell = (\partial^\ell) \rightsquigarrow \mathcal{A} = \mathbb{C}[[\partial]]$ series formales de potencia

---

Ejemplo en nuestro contexto:

$$H_n := \sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j}\psi^*_{j+n}: \in \bar{\mathcal{A}} \ ?$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}+1/2 \\ j > -n}} \psi_{-j}\psi^*_{j+n}}_{H_n'} - \underbrace{\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}+1/2 \\ j > n}} \psi^*_{n-j}\psi_j}_{H_n''}$$

cada suma parcial para H_n', H_n'' es en $\mathcal{A}^{(-n)}$ /

pero $\psi_{-j}\psi^*_{j+n}$, $\psi^*_{n-j}\psi_j \in \mathfrak{U}_{j-n}$

$\Rightarrow \quad H_n \in \overline{\mathcal{A}^{(-n)}}$

$\Rightarrow \quad \exp(H_n) \in \overline{\mathcal{A}}$ si $n < 0$

5.3 Realizando los Bosones

Definimos operadores $H_n \in \overline{\mathcal{A}}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ a través de una serie generadora:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n z^{-n-1} := \,:\psi(z)\psi^*(z):$$

$$= \,:\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n-1/2} z^{-n}\right)\cdot\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi^*_{m-1/2} z^{-m}\right):$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j}\,\psi^*_{j+n}: \right)}_{H_n} z^n$$

Observamos

$$:\psi_{-j}\,\psi^*_{j+n}: = \begin{cases} \psi_{-j}\,\psi^*_{j+n} & \text{si } j > -n \\ -\psi^*_{j+n}\,\psi_{-j}, & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$:\psi_{-j}\,\psi^*_{j+m}: \,|\,\underline{m}\rangle = 0 \quad \text{para}$$

casi todo j una vez que fijamos

$\underline{m} \in \bar{F}$!

Nuestro siguiente objetivo es determinar las relaciones entre los operadores H_m

Para esto observamos las siguientes relaciones universales (en cualquier anillo asociativo)

$$[A\cdot B, C] = A\cdot BC - CAB$$

$$= ABC \overset{(-)}{+} ACB \overset{(+)}{-} ACB - CAB$$

$$= A[B,C]_+ - [A,C]_+ B$$

$$= A[B,C] + [A,C]\cdot B$$

Con eso vemos lo siguiente:

$$[\psi_{-j}\psi^*_{j+n}, \psi_m] = \psi_{-j}\overbrace{[\psi^*_{j+n}, \psi_m]_+}^{\delta_{j+n+m,0}} + \cancelto{0}{- [\psi_{-j}, \psi_m]_+}\, \psi^*_{j+n}$$

$$[-\psi^*_{j+n}\psi_{-j}, \psi_m] = [\psi^*_{j+n}, \psi_m]\psi_{-j}$$

$$- \psi^*_{j+n}\cancelto{0}{[\psi_{-j}, \psi_m]}$$

$$= \delta_{j+n+m,0}\, \psi_{-j}$$

Concluimos de eso:

$$\therefore \quad [H_n, \psi_m] = \psi_{n+m}$$

$$[H_n, \psi^*_m] = -\psi^*_{m+n}$$

siguiendo estas ideas

$$\Rightarrow [H_m, H_n] = m\,\delta_{m+n,0}$$

$\therefore$ Tenemos un homomorfismo de álgebras

$$\omega : B \longrightarrow \bar{A}, \quad a_n \longrightarrow H_n$$

$$a_n^* \longrightarrow \tfrac{1}{n} H_{-n}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$B = \mathbb{C}\langle a_n, a_n^* \mid n \in \mathbb{N}_+ \rangle \Big/ \Big\langle [a_i, a_j], [a_i^*, a_j^*], [a_i, a_j^*] - \delta_{ij} \Big\rangle$$