5.4. El isomorfismo entre los espacios de Fock

Recordamos:

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathcal{A}}$$

hom. de álg.

esp. de Fock bosónico

$$\mathcal{B} \quad \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

esp. de Fock fermiónico

$$\mathcal{A} \quad \tilde{\mathcal{F}} = \bigoplus \mathbb{C}\,|\underline{m}\rangle$$

$\underline{m}$: diag. de Maya

A través de c podemos ver a $\tilde{F}$ como un B-módulo y afirmamos que

$\tilde{F}_c$ como

B-módulo es isomorfo a $\mathbb{C}[x_1, \ldots,]$

Por definición los operadores

$$H_n := \sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j} \psi^*_{j+n}:$$

tienen carga 0 (y energía $-n$)

en particular ; $H_n \cdot \tilde{\mathcal{F}}_\ell \subset \tilde{\mathcal{F}}_\ell$

$\left(\mathcal{F} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_\ell \right) \quad \forall\, n, \ell$

Por eso podemos esperar que

$$\mathcal{F}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

Para tratar todos estos casos simultaneamente consideramos

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}, x_1, x_2, \dots\dots]$$

$$= \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} z^\ell\, \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

$\uparrow$

isom. de esp. vect.

Definimos el operador

$$\underline{H}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n H_n$$

$$\in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \hat{\otimes} \mathcal{A}$$

Notemos que $H(x)|\ell\rangle = 0 \ \forall \ell \in \mathbb{Z}$!

porque en realidad

$$H_n |\ell\rangle = 0 \quad \forall n, \ell \quad (!)$$
$$n > 0$$

$$:\psi_{-j}\,\psi^*_{j+n}:|\ell\rangle = 0$$

Como los H_n $(n \in \mathbb{N})$ conmutan entre ellos

$$\exp(H(x)) \;``="\; \sum \frac{x_1^{m_1}\, x_2^{m_2} \cdots x_\ell^{m_\ell}}{m_1!\, m_2! \cdots m_\ell!}\, H_1^{m_1} \cdots H_\ell^{m_\ell}$$

y observamos

$$H_n^\ell\, |u\rangle = 0 \quad \forall\, \ell \gg 0$$

es decir $\exp(H(x))\,|u\rangle$ está bien definido para todo

$|u\rangle \in \tilde{\mathcal{F}}$.

de hecho

$$\exp(H(x))|u\rangle \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots] \otimes \tilde{\mathcal{F}}$$

Con todo esto definimos

$$\phi : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{C}[z^{\pm 1}, x_1, x_2, \dots]$$

$$|u\rangle \longmapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z^{-\ell} \langle \ell | \exp(H(x)) | u \rangle$$

Observamos que

$$\phi(\mathcal{F}_\ell) \in z^{\ell}\, \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

porque $\exp(H(\underline{x}))\mathcal{F}_e \subseteq \mathcal{F}_e$

y la definición del producto escalar.

<u>Teorema</u> (Isomorfismo de espacios de Fock)

El mapeo

$$\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}[z^{\pm 1}; x_1, x_2, \ldots]$$

$$|u\rangle \longmapsto \sum_{e \in \mathbb{Z}} z^{-e} \langle e | \exp(H(x)) | u \rangle$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-esp. vectoriales.

Si damos a $\tilde{F}$ una estructura de $\mathcal{B}$-módulo a través de $\iota : \mathcal{B} \longrightarrow \tilde{A}$ (ver 5.3) entonces, ϕ es un isomorfismo de $\mathcal{B}$-módulos

Más explícitamente tenemos

$$\phi(H_n|u\rangle) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_n}\phi(|u\rangle) & \text{si } n>0 \\ -n\, x_{-n}\, \phi(|u\rangle) & \text{si } n<0 \end{cases} \tag{5.17}$$

<u>Dem.</u>: ϕ es claramente $\mathbb{C}$-lineal. Antes de verificar que ϕ es un isom. de $\mathbb{C}$-esp. vect. verificamos (5.17), es decir verificamos que ϕ es un homom. de $\mathcal{B}$-módulos

Observemos primero que

$$H_m \cdot H_n = H_n \cdot H_m \text{ si } m, n > 0$$

$\left(\Leftrightarrow [H_m, H_n] = 0 \right)$. Por eso, para $n > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\langle e | \exp(H(x)) | u \rangle \right)$$

$$= \langle e | \frac{\partial}{\partial x_n} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j H_j \right) | u \rangle$$

$$= \langle e | \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot H_j \right) H_n | u \rangle$$

lo cual demuestra el primer caso ($n > 0$) de 5,1])

Por otro lado,

$$\langle l \,|\, \exp(H(x))\, H_{-n} \,|\, u \rangle$$

$$= \langle l \,|\, \underbrace{\exp(H(x))\, H_{-n} \exp(-H(x))}_{?}\, \exp(H(x)) \,|\, u \rangle$$

Ahora usando $[H(x), H_{-n}] = n x_n$

vemos que

rec.: $Ad(B)(M) := [B, M]$

(2)

$$= \exp\left(\mathrm{Ad}(H(x))\right) H_{-n}$$

$$= H_{-n} + [H(x), H_{-n}]$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2}\,[H(x), \underbrace{[H(x), H_{-n}]}_{n x_n}]}_{=0}$$

$$= H_{-n} + n x_n$$

Resumiendo nuestro cálculo vemos

$$\langle \ell | \exp(H(x)) H_{-n} | u \rangle$$

$$= \langle \ell | (H_{-n} + n x_n) \exp(H(x)) | u \rangle$$

$$\overset{!}{=} n x_n \langle \ell | \exp(H(x)) | u \rangle$$

porque $\langle \ell | H_{-n} = 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}$
$n \in \mathbb{N}_+$

(similar a $H_n | \ell \rangle = 0$ arriba)

∴ ya establecimos (5.17).

• Ahora verificamos que ϕ es suprayectivo :

Como $H(x)|\ell\rangle = 0$ (ver arriba)

$$\exp(H(x))|\ell\rangle = |\ell\rangle$$

$$\Rightarrow \phi(|\ell\rangle) = z^{\ell}$$

En vista de (5.17) vemos que al aplicar a $|\ell\rangle$ un monomio en los H_{-n}'s obtenemos cualquier monomio de $\mathbb{C}[z^{\pm 1}, x_1, x_2, \ldots]$

salvo un escalar.

$\therefore$ ϕ es suprayectivo.

- Falta ver que ϕ es inyectivo

eso es un argumento de grado que relegamos a los ejercicios ! Ej. 5.5.

$$\phi\left(\tfrac{1}{2} H_{-1} H_{-2} \underset{|0\rangle}{|vac\rangle}\right) = x_1 x_2$$

Obs. Mas adelante veremos que las imágenes de los diag. de Maya bajo ϕ son esencialmente los polinomios de Schur

Ejemplo Queremos ver que pasa bajo ϕ con los diagramas de Maya, por lo menos en algunos casos:

Recordamos

$$H(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n H_n \quad \text{y} \quad \text{Das}$$

relaciones

$$[H_n, \psi_m] = \psi_{m+n}$$

$$[H_n, \psi_n^*] = -\psi_{m+n}^*$$

$$\Rightarrow [H(x), \psi(z)] = \xi(x, z)\, \psi(z)$$

$$[H(x), \psi^*(z)] = -\xi(x, z)\, \psi^*(z)$$

donde $\xi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n x_n$

$$\psi^{(*)}(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_\ell^{(*)} z^{-\ell-1/2}$$

Por eso podemos calcular de forma similar a la dem. del Teorema (o del Ej. 3.3)

$$e^{H(x)} \psi(z) e^{-H(x)} = \exp(\mathrm{ad}(H(x))) \psi^{(*)}(z)$$

$$= \psi(z) + [H(x), \psi(z)] + \frac{1}{2}[H(x),[H(x),\psi(z)]] + \ldots$$

$$\psi(z) + \xi(x,z)\psi(z) + \frac{1}{2}\xi(x,z)^2\psi(z) + \ldots$$

$$= \exp\left(\xi(x,\ell)\right)\psi(\ell). \qquad (5.19)$$

$$\Big) \; e^{H(x)} \psi^*(\ell) e^{-H(x)} = \ldots = e^{-\xi(x,\ell)} \psi^*(\ell)$$

Ahora, con

$$e^{\xi(x,\ell)} = \sum \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_\ell!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_\ell^{n_\ell} \ell^{n_1+2n_2+\ldots+\ell n_\ell}$$

$=$

usamos implícitamente

$$\exp(a_1 + a_2 + \ldots + a_\ell) = 1 + (a_1 + \ldots + a_\ell)$$

$$+ \cdots \frac{1}{n!}\underbrace{(a_1 + \cdots + a_\ell)^n} + \cdots$$

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_\ell=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_\ell} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_\ell^{n_\ell}$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_\ell} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\ell!}$$

$$= 1 + x_1 z + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right) z^2$$

$$+ \left(x_3 + x_2 x_1 + \frac{x_1^3}{6}\right) z^3 +$$

$$+ \cdots + p_\ell(\underline{x})\, z^\ell + \cdots$$

Con eso extraemos de (5.19)

$$e^{H(x)}\, \psi_n\, e^{-H(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}\, p_j(\underline{x})$$

$$) \; e^{H(x)}\, \psi_n\, e^{-H(x)} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n-j}\, p_j(-\underline{x})$$

Con todo eso podemos calcular

$$\phi\left(\psi_n |vac\rangle\right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z^{-\ell} \langle \ell | e^{H(x)} \psi_n |vac\rangle$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z^{\ell} \langle -\ell | \underbrace{e^{H(x)} \psi_n e^{-H(x)}} \underbrace{e^{H(x)} |vac\rangle}$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} z^{\ell} \langle -\ell | \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x) \psi_{j+n} |vac\rangle \qquad |vac\rangle$$

charge $q = 1$

$$= z\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x) \psi_{j+n} |vac\rangle \right)$$

$$= 2 \cdot p^{-1/2-n} .$$

Más adelante veremos una formula general para los polinomios

$\phi(|\underline{m}\rangle)$ en términos de polinomos de caracter $\leftrightarrow$ polinomos de Schur.