5.5. Realizando los Fermiones

Sea
$$P = \mathbb{C}[z^{\pm 1}, x_1, x_2, \dots] = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \underbrace{z^{\ell}\, \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]}_{P_\ell}$$

Es una suma directa de módulos simples P_ℓ sobre el álgebra de Heisenberg (Weyl)

$$R = \mathbb{C}\langle a_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle / \langle [a_m, a_n] - m\,\delta_{m+n,0}$$

$$a_0 \cdot z^\ell \cdot p = \ell z^\ell p$$

$$(p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots])$$

$$\mathcal{B} \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}, \quad a_\ell \mapsto H_\ell = \sum :\psi_{-i}\psi^*_{\ell+i}:$$

$$\phi : {}_{\mathcal{B}}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathcal{B}}\mathcal{P}$$

bajo ese isomorfismo queremos entender la acción de los $\psi_i^{(*)}$ sobre $\mathcal{B}$

Obviamente tenemos un problema porque los Fermiones <u>sí</u> cambian la carga mientras los elementos de $\mathcal{B}$ tienen carga 0!

Por eso necesitamos por lo menos un operador e^{α} que haga esto:

$$e^{\alpha} \cdot f := z \cdot f$$ (en los físicos)

también la acción dependerá de la carga l de S_e ~)

$$q^{H_0} f(z, \underline{x}) = f(qz, \underline{x})$$

así $q^{H_0} \cdot z^{\ell} = q^{\ell} z^{\ell}$

A primera vista sin mucha motivación introducimos operadores

$$\Gamma_-(q) = \exp(\xi(\underline{x}, q))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x)\, q^j$$

$$\Gamma_+(q) = \exp(\xi(\tilde{\partial}, q^{-1}))$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial_j}{j} z^{-j} \right)$$

$$\tilde{\partial} = (\partial_1, \partial_2/2, \partial_3/3, \ldots)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\tilde{\partial}) z^{-j}$$

- Observamos: Si $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ de grado l homogenea entonces $p_j(\tilde{\partial}) f$ es de grado $l - j$.

$$\exp(\xi(\tilde{\partial}, z^{-1}))\, f$$

$$= f\left(x_1 + z^{-1}, x_2 + \frac{z^{-2}}{2}, x_3 + \frac{z^{-3}}{3}, \dots\right)$$

Ahora definimos

$$\Psi(z) = \Gamma_-(z)\, \Gamma_+(z)^{-1} e^{K} e^{l \cdot t_0}$$

(compara oj. vértice!)

Observación:

$$\Gamma_+(z)^{-1} = \exp(-\xi(\tilde{\partial}, z^{-1}))$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-\tilde{\partial})\, z^{-j}$$

$$\Rightarrow \Gamma_-(z)\,\Gamma_+(z)^{-1}$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\sum_{j=\max(0,\ell)}^{\infty} p_j(\underline{x})\, p_{j-\ell}(-\tilde{\partial}) \right)}_{\gamma_\ell} z^{\ell}$$

Similarmente definimos

$$\Psi^{*}(z) = \Gamma_{-}(z)^{-1}\,\Gamma_{+}(z)\,e^{-K}\,z^{-H_0}$$

<u>Teorema</u> (realizando los Fermiones)

Las funciones generadoras

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_n\, z^{-n-1/2}$$

$$\psi^{*}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_n^{*}\, z^{-n-1/2}$$

se manifiestan en el espacio

de Fock bosónico $\mathcal{P}$

como los operadores

$$\Psi(z) \quad \text{resp.} \quad \Psi^*(z)$$

es decir:

$$\phi(\psi(z)|u\rangle) = \Psi(z)\,\phi(u\rangle)$$

$$\phi(\psi^*(z)|u\rangle) = \Psi^*(z)\,\phi(u\rangle)$$

Para la demostración de este resultado seguiremos ideas expuestas en el libro de texto V. Kac: Infinite dimensional Lie algebras

Sec. 14.5 y Tma 14.10 :

Abreviamos $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots] = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ graduado con $\deg x_i = i$ de dim fin!

$\hat{R} = \mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$ series formales de potencia

no permiten sumas infinitas de la forma

$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ con $f_i \in R_i$.

y $\hat{B}$ el espacio de operadores diferenciales de la forma

$$D = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\underline{x})\, Q_j(\partial) \quad \text{con } P_j \in \hat{R} \text{ y } Q_j \in R_j$$

Los elementos de $\hat{B}$ definen mapeos $\mathbb{C}$-lineales de R a $\hat{R}$ (!)

<u>Ejemplo</u> Para $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{C}$ es operador

$$T_{\underline{\lambda}} = \exp\Big(\sum_{i \geq 1} \lambda_i \partial_i\Big) \in \hat{B}$$ y para cada

$f \in R$ tenemos $(T_\lambda f)(x) = f(x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2, \dots)$

Lema Sea $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(R, \hat{R})$.

a) Si $[x_i, D] = x_i \circ D - D \circ x_i = \lambda_i D \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$

entonces $D = D(1)\, T_{-\underline{\lambda}}$ $\quad (\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots))$

b) Si $[\partial_i, D] = \mu_i D \quad \forall i = 1, 2, \dots$

entonces $D(1) = c \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i\right)$ para algún $c \in \mathbb{C}$.

c) Si $[x_i, D] = \lambda_i D$ y $[\partial_i, D] = \mu_i D$ $\forall i \in \mathbb{N}_+$ entonces

$$D = c \exp\left(\sum \mu_i x_i\right) \exp\left(-\sum \lambda_i \partial_i\right)$$

Dem. a) Si $[x_i, D] = \lambda_i D \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$ entonces

$$
\begin{aligned}
[D \circ T_\lambda, x_i] &= D \circ T_\lambda \circ x_i - x_i D \circ T_\lambda \\
&= D \circ (x_i + \lambda_i) \circ T_\lambda - x_i D T_\lambda \\
&\overset{\text{hip}}{=} x_i D T_\lambda - x_i D T_\lambda = 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$

Por eso es suficiente demostrar:

$[x_i, D] = 0 \ \forall i \Rightarrow D = D(1) \in \hat{R}$.

Pero eso es claro ya que en este caso

$D(x_i m) = x_i D(m)$ para todo monomio

$m \in R \overset{\text{ind.}}{\Rightarrow} D(m) = D(1)\, m$

b) es similar a a): Si en esta situacimos D

por $\tilde{D} := \underbrace{\exp(-\sum_i \mu_i x_i)}_{\in R^1} \cdot D$

entonces nuestra afirmación es equivalente a

$[\partial_i, \tilde{D}] = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow D(1) = c \in \mathbb{C}$.

Sin embargo $[\partial_i, D] = 0$ significa en particular

$0 = (\partial_i D - D \partial_i)(1) = \partial_i(D(1)) \ \forall i \in \mathbb{N}_+$

$\Rightarrow D(1) \in \mathbb{C}$

c) Sigue trivialmente de a) y b). $\square$

Ahora la demostración del Teorema es fácil:

De (5.10) concluimos

$[H_n, \psi(z)] = z^n \psi(z)$ y

$$[H_n, \psi^*(z)] = -z^n \psi(z)$$

Esto se transporta vía

$$\Phi = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \Phi_\ell \quad \text{con} \quad \Phi_\ell : F_\ell \xrightarrow{\sim} B_\ell = z^\ell \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

a

$$[\underbrace{\Phi_* H_n \Phi_*^{-1}}_{-n x_{-n} / \partial_n}, \underbrace{\Phi_{\ell+1} \psi(z) \Phi_\ell^{-1}}_{D}] = z^n \Phi_{\ell+1} \psi(z) \Phi_\ell^{-1}$$

Lema

$$\Longrightarrow \quad \Phi_{\ell+1} \psi(z) \Phi_\ell = C(z) \Gamma_-(z) \Gamma_+(z)^{-1}$$

$$y \quad \langle -(\ell+1), \psi(z), \ell \rangle = z^{\ell+1}$$

$\square$