Los elementos $\hat{\mathfrak{gl}}_\infty \subset \overline{W}^{(2)} \subset \mathcal{A}$ tienen carga 0 y por lo tanto su acción sobre $\tilde{F}$ manda elementos de $\tilde{F}_\ell$ a $\tilde{F}_\ell$. Por lo tanto podemos ver cada $\tilde{F}_\ell$ como una representación del álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{gl}}_\infty$,

G con $\mathrm{Lie}(G) = \widetilde{\mathfrak{gl}_\infty} / \mathfrak{gl}_\infty$?

$$G|\mathrm{vac}\rangle \subset \widetilde{\mathcal{F}}_0$$

$$\Phi : \widetilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[z^{\pm 1}, x_1, x_2, \ldots]$$

$$\underbrace{\underline{\Phi}\,(G|\mathrm{vac}\rangle)}_{\tau\text{- funciones polinomiales de la jerarquía KP}} \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$$

Nos recordamos de las funciones generadoras de Fermiones

$$\psi(p)\,\psi^*(q) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-m}\,\psi_n\, q^{m-1/2}\, p^{-n-1/2}$$

Por otro lado vimos en Sec. 5.5:

$$\psi(p) \longleftrightarrow \Psi(p) = E(p)\, e^{K}\, p^{H_0}$$

$$\psi^*(q) \longleftrightarrow \Psi^*(q) = E^*(q)\, e^{-K}\, q^{-H_0}$$

con $E(p) := e^{\xi(x,p)}\, e^{-\xi(\tilde{\partial},p^{-1})}$

$$E^*(q) = e^{-\xi(x,q)}\, e^{\xi(\tilde{\partial},q^{-1})}$$

$$\xi(\underline{x},p) \equiv \sum_{i\geq 0}^{\infty} x_i\, p^i$$

$$\xi(\tilde{\partial}, p^{-1}) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial_i}{i}\, p^{-i}$$

Entonces $\psi(p)\,\psi^*(q)$ corresponde a

$$\Psi(p)\,\Psi^*(q) = E(p)\, \underbrace{e^{K}\, p^{H_0}}_{\text{no involucran } q \text{ ni los } x'} E^*(q)\, e^{-K}\, q^{-H_0}$$

$$= E(p)\,E^*(q)\, e^{K}\, \underbrace{p^{H_0}\, e^{-K}}_{p^{-1} e^{-K} p^{H_0}}\, q^{-H_0}$$

$$= E(p)\,E^*(q)\, p^{-1}\, p^{H_0}\, q^{-H_0}$$

$$= \frac{p^{-1}}{1 - q/p} \underbrace{e^{\xi(x,p)} e^{-\xi(x,q)} e^{-\xi(x,p^{-1})} e^{\xi(x,q^{-1})}}_{X(p,q) \text{ de } 3.3}$$

$$e^{-\xi(\tilde{\partial}, p^{-1})} e^{-\xi(x,q)} = \frac{1}{1-q/p} e^{-\xi(x,q)} e^{-\xi(\tilde{\partial}, p^{-1})}$$

$$= \frac{1}{p-q} X(p,q)\, p^{H_0} q^{-H_0}$$

Hay que interpretar aquí como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^{k}$

Finalmente nos restringimos a

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$$

(carga $0 \longrightarrow p^{H_0} q^{-H_0}$ actua como la identid)

y para entender la acción de $\widetilde{\mathfrak{gl}}_\infty$ en realid necesitamos lo que corresponde a

$$:\psi(p)\psi^*(q): = \psi(p)\psi^*(q) - \langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle$$

Sec. 5.2 ?

$$= \psi(p)\psi^*(q) - \frac{1}{p-q}$$

$:\psi(p)\psi^*(q):$ restringido a $\mathcal{F}_0$

corresponde al operador

$$Z(p,q) = \frac{1}{p-q}\left(X(p,q) - 1\right)$$

sobre $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$

~~Duda~~ Observación: De las

relaciones que definen el álgebra de Clifford $\mathcal{A}$ concluimos

$$[\psi(p), \psi(q)]_+ = 0$$

porque $[\psi_i, \psi_j]_+ = 0$

$$[\psi(p), \psi^*(q)]_+ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

$$= \delta(p/q)$$

No puedo reproducir estas relaciones para $\Psi(p), \Psi^*(q)$ ¿¿

Si fuera así podríamos reproducir la formula para $[X(p,q), X[p',q']]$ del ejercicio 3.3 usando la forma por $[w_1 w_2, w_3 w_4]$ en terminos de anticonmutadores!

Resumiendo nuestros cálculos:

<u>Teorema</u> Si con la notación de arriba definimos operadores $(Z_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}+1/2}$ a traves de

$$\frac{1}{p-q}\left(X(p,q)\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} z_{ij}\, p^{-i-1/2} q^{-j-1/2}$$

Entonces la asignación

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}+1/2} a_{mn} :\psi_m \psi_n^*: \mapsto \sum_{m,n\in\mathbb{Z}+1/2} z_{m,n}\, p^{-i-1/2} q^{j-1/2}$$

define una representación del álgebra de Lie $\tilde{gl}_\infty$ sobre $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$

6.3 El grupo de simetrías de la jerarquía de KP y funciones τ

"Definimos" un grupo G (de dimensión infinita) con $\mathrm{Lie}(G) = \tilde{gl}_\infty$ como

$$G := \{ e^{x_1} e^{x_2} \cdots e^{x_k} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in gl_\infty \}$$

Para una aproximación consideramos el grupo GL_∞ con Lie$(GL_\infty) = gl_\infty$

este grupo consiste de las matrices

$g = (g_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}+1/2}$ tal que

$g_{ij} - \delta_{ij}$ tenga solamente un número finito de (ij) ser

$g_{ij} - \delta_{ij} \neq 0$ y

tal que g sea invertible

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & G \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \boxed{M} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad M \text{ invertible}$$

Nos interesa la órbita

$$G|vac\rangle \subset \mathcal{F}_0$$

o más bien su imagen bajo Φ! $\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$

Por eso definimos funciones τ:

$$\tau(x, g) = \langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle$$

con $g \in G$ (o GL_∞ ?)

Paralelamente definimos funciones de onda ("wave functions")

$$w(x, z) := \frac{\langle -1 | e^{H(x)} \psi(z) g | vac \rangle}{\langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle}$$

y

$$w^*(x, z) := \frac{\langle 1 | e^{H(x)} \psi^*(z) g | vac \rangle}{\langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle}$$

Comparemos con las funciones de onda de la Sec. 3:

$$w(x,k) = \frac{\tau\left(x_1 - 1/k,\, x_2 - \frac{1}{2k^2},\, \dots\right)}{\tau(\underline{x})}\, e^{\xi(x,k)}$$

$$e^{\xi(\tilde{\partial},\, k^{-1})}\,\tau$$

$$= \frac{\Psi(k)\,\tau}{\tau}$$

Como en el capítulo 3.4, vamos a verificar que

$w(x,z)$ y $w^*(x,z)$ cumplen la identidad bilineal de Hirota

Resumen El álgebra de Lie

$$gl_\infty(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \mathbb{C}E_{ij} \subset W^{(2)} \subset A$$

$$E_{ij} \longmapsto \psi_{-i}\psi_j^*$$

con el conmutador usual de matrices

actúa sobre el espacio de Fock fermiónico $\mathcal{F} = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_\ell$