

Recordamos el resultado principal:

Tma

a) para todo diagrama de Maya \underline{m}
de carga 0 tenemos $\mathbb{P}^* | \underline{m} \rangle \subseteq \mathcal{G} | \text{vac} \rangle$

$$b) \mathcal{G} | \text{vac} \rangle = \left\{ \omega \in \mathcal{F}_0 \mid \sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_{-i}(\omega) \otimes \psi_i^*(\omega) = 0 \right\}$$

Queremos interpretar este resultado

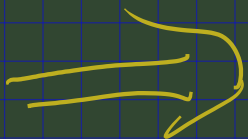
del lado Bosónico $([x_1, x_2, \dots])$

Recordamos $\psi^{(*)}(\underline{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_n^{(*)} x^{-n - \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \psi(z) \otimes \psi^*(z)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_{-n} \otimes \psi_{n-m}^* \right) z^{m-1}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{m=0!}$



Corolario 1 Para $u \in F_0$ tenemos

$$u \in \mathfrak{gl}_\infty |vac\rangle \iff$$

$$\text{Res}_{z=0} \left(\psi(z) |u\rangle \otimes \psi^*(z) |u\rangle \right) = 0$$

En vista de la correspondencia entre Bosones y Fermiones alternos

Corolario 2

$\tau \in \mathbb{C}[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots]$ cumple la
identidad bilineal de Hirota

$$\text{Res}_{\mathcal{Q}=0} \left(e^{\xi(\underline{x}, \mathcal{Q}) - \xi(\underline{x}', \mathcal{Q})} \tau(\underline{x} - \frac{\mathcal{Q}^{-1}}{2}, \underline{x}_2 - \frac{\mathcal{Q}^{-2}}{2}, \dots) \right. \\ \left. \times \tau(\underline{x}' + \frac{\mathcal{Q}^{-1}}{2}, \underline{x}_2' + \frac{\mathcal{Q}^{-3}}{2}, \dots) \right)$$

$\forall \underline{x}, \underline{x}'$

$$= \text{Res}_{\mathcal{Q}=0} \left(e^{\xi(\underline{x}, \mathcal{Q})} \tau(\underline{x}) \otimes e^{-\xi(\tilde{\partial}_{\underline{x}}, \mathcal{Q}^{-1})} \tau(\underline{x}') \right. \\ \left. \oplus e^{-\xi(\underline{x}', \mathcal{Q})} \tau(\underline{x}') \otimes e^{\xi(\tilde{\partial}_{\underline{x}'}, \mathcal{Q}^{-1})} \tau(\underline{x}) \right)$$

$$\mathbb{C}[\underline{x}, \underline{x}'] \cong \mathbb{C}[\underline{x}] \otimes \mathbb{C}[\underline{x}'] \quad \forall \underline{x}, \underline{x}'$$

sí y solamente sí

$$\tau = \tau(x, g) (= \underline{\Phi}(g|vac))$$

para algún $g \in GL_{\infty}$.

Eso es claro en vista del Cor 1

y la descripción de $\psi(\mathcal{E})$ y $\psi^*(\mathcal{E})$
trajo la corresp. de R-F (carga 0)

Obs. Como al final del cap. 3

esto significa en particular que

los $\tau(x, g)$ resp. $w(x, g, \mathcal{E})$

cumplan la jerarquía de KP. \square

6.3 Diagramas de Maya 7

polinomios de Schar (Sec. 9.3.)

Recordamos

$$\bullet e^{\xi(x, \mathcal{L})} = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathcal{L}^i\right) = \prod_{i \geq 1} S_i(x) \mathcal{L}^i$$

$$(S_0 = 1, S_1 = x_1, S_2 = x_2 + \frac{1}{2} x_1^2, \dots)$$

- Los diagramas de Maya de carga 0 son de la forma (salvo un signo)

$$\psi_{m_1} \psi_{m_2} \dots \psi_{m_r} \psi_{m_1}^* \dots \psi_{m_r}^* (\text{vac})$$

con $m_1 < m_2 < \dots < m_r < 0$
 $n_1 < n_2 < \dots < n_r < 0$

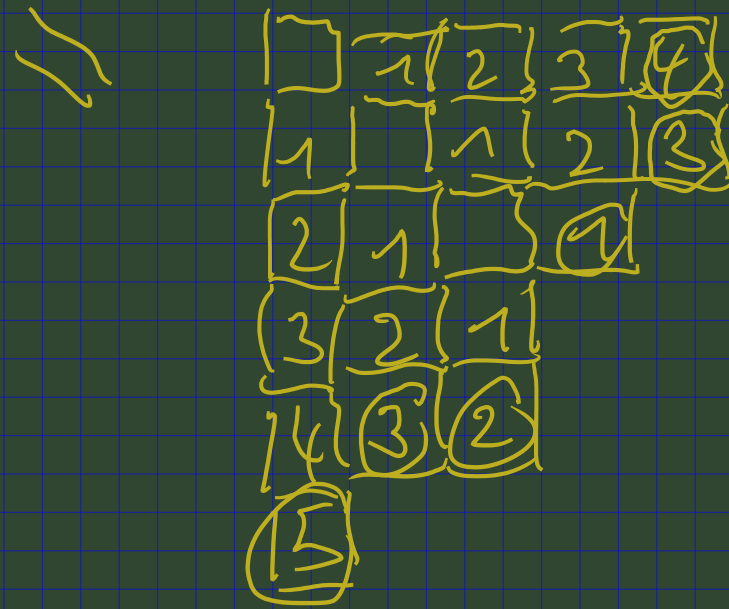


• todos estos diag. de Maya son elementos de $GL_{\infty}(\mathbb{Q}) / \text{vac}$.

Usamos esta descripción para asignar a tal diag de Maya una partición:

Por ejemplo el diag de Young

$$\gamma(4, 3, 1 | 5, 3, 2) \sim \gamma$$



$$= \gamma(5, 5, 4, 3, 2, 1)$$

Entonces el polinomio de

carácter

$$\chi_\gamma(\underline{x}) = \det(h_{m_i, n_j}(\underline{x}))$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r$$

clavel

$$h_{m,n} = (-1)^m \sum_{\ell \geq 0} S_{\ell+m+1}(x) S_{n-\ell}(-x)$$

y recordamos $S_j = 0$ para $j < 0$

$$= (-1)^m \sum_{\ell < 0} S_{\ell+m+1}(x) S_{n-\ell}(-x)$$

con viene definir

definir $T_n(x) := (-1)^n S_n(-x)$

observamos:

$$h_{m,n}(x) = \chi_{\mathbb{Z}}(m/n)(x)$$

$$\gamma \quad \gamma(m/n) = \left[\begin{array}{c} \overbrace{[\quad] \quad [\quad] \quad [\quad]}^m \\ \vdots \\ [\quad] \end{array} \right]_n$$

en particular

$$S_n(x) = x \overbrace{[\quad] \quad \dots \quad [\quad]}^m$$

$$T_n(x) = x \left[\begin{array}{c} [\quad] \\ \vdots \\ [\quad] \end{array} \right]_n$$

Es un resultado clásico que los polinomios de caracter parron una base de $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_g, \dots]$

- Los polinomios de carácter están relacionados con los polinomios de Schur p_γ a través de un cambio de variables:

$$x_\gamma (p_1, p_2, p_3, \dots) = p_\gamma (y_1, y_2, \dots)$$

con

$$p_i := y_1^i + y_2^i + y_3^i + \dots$$

- "Nuestra definición" de x_γ es la fórmula de Giambelli.

Teorema (9.4) Bajo la corres. BF

$$\mathbb{F}_0 : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

$$\mathbb{F}_0 (\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{m_1}^* \dots \psi_{m_r}^* | \text{vac} \rangle)$$

$$= (-1)^{\sum_{i=1}^r (n_i + 1/2) + r(r-1)/2} x_1 y$$

donde

$$\gamma = (-m_1 - 1/2, -m_2 - 1/2, \dots, -m_r - 1/2 | -m_1 - 1/2, \dots, -m_r - 1/2)$$

El teorema es una consecuencia

inmediata del siguiente Lema

y el teorema de Wick

Recordemos de Sec. 5.4

$$\psi_n^{(*)}(x) = e^{H(x)} \psi_n^{(*)} e^{-H(x)}$$

Formulas (5.21) y (5.22):

$$\psi_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j} S_j(x)$$

$$\psi_n^*(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}^* S_j(-x)$$

Lema (9.5) para $m, n \geq 0$ tenemos

$$h_{m,n}(x) = (-1)^m \langle \text{vac} | \psi_{-m-1/2}(x) \psi_{-n-1/2}^*(x) | \text{vac} \rangle$$

Dem.

$$\langle \text{vac} | \psi_{-i}(x) \psi_{-j}^*(x) | \text{vac} \rangle$$

$$\stackrel{\text{II}}{=} \sum_{n,t} \langle \text{vac} | \psi_{i+n} \psi_{j+t}^* | \text{vac} \rangle S_n(x) S_t(-x)$$

$$= \sum_{i+n+j+t \geq 0} \theta(i+t > 0)$$

$$\stackrel{-j-1/2}{=} \sum_{t=0} S_{-i-j-t}(x) S_t(-x)$$

