7. El grupo de simetrías de la jerarquía de KdV

7.1 Recordemos

En el formalismo de Lax para la jerarquía KP se busca una familia de funciones $f_1, f_2, \ldots$, tal que con el operador

$$L = \partial + \sum_{i \geq 1} f_i \, \partial^{-i}$$

se cumpla

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = [(L^j)_+, L] \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots$$

en el caso especial de KdV se pide adicionalmente que

$L^2 = \partial^2 + u$ sea un operador diferencial (propio)

en este caso todos los b_i's dependen de u (son pol. diferenciales en u)

Esta condición implica que

L^{2j} es un operador diferencial

$$\Rightarrow (L^{2j})_+ = L^{2j} \quad \forall \; j = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow [(L^{2j})_+, L] = [L^{2j}, L] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x_{2j}} = 0 \quad \forall \; j = 1, 2, \ldots,$$

eso significa $\frac{\partial u}{\partial x_{2j}} = 0 \quad \forall j$

o en otras palabras u <u>no</u> depende de las variables pares.

Recordamos también, que para ambas jerarquías podíamos derivar las ecuaciones $\frac{\partial L}{\partial x_j} = [(L^j)_+, L]$

de un sistema de ecuaciones lineales para las "funciones de onda"

$$w(\underline{x}, z) = e^{\xi(x,z)}\left(1 + \frac{w_1}{z} + \frac{w_2}{2z^2} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} + \dots\right)}_{M} e^{\xi(x,z)}$$

y las ecuaciones

$$L w = z w \quad \to \quad \frac{\partial w}{\partial x_j} = (L^j)_+ w \quad \forall j$$

$$\rightsquigarrow \quad L = M \partial M^{-1}$$

$$\begin{gathered} \parallel\!\mid \\ \partial + \sum_{j \geq 1} f_j \partial^{-j} \end{gathered}$$

($\to$ en el caso KdV los f_j's dependían todos de u),

En el lenguaje de las funciones τ y operadores de Hirota hicimos el "Ansatz"

$$w(\underline{x}, z) = \frac{e^{\xi(x,z)}\left(\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-\tilde{\partial})\tau \, z^{-j}\right)}{\tau}$$

y (en el caso KdV además

$$u = \partial_{x_1}^2 (2 \log \tau)$$

y además en la vista de la identidad bilineal las funciones

τ tienen que cumplir ecuaciones de la forma

$$P_m(D)\,\tau\cdot\tau$$

donde los polinomios P_m son los coeficientes de z^m en

$$\mathrm{Res}\big|_{z=0} \exp\left(2\xi(y,z)\right) \times \exp\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left(y_l - \frac{1}{l z^l}\right)D_l\right)$$

Si queremos obtener las funciones τ de la jerarquía KdV simplemente tenemos que imponer las condiciones adicionales $\dfrac{\partial \tau}{\partial x_{2m}} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$

Por ejemplo, si consideramos las soluciones de n-solitones de KP

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\tau_{n, (c_i, p_i, q_i)_{i=1,\ldots,n}}(x) = \sum_{J \subset I} \left(\prod_{i \in J} c_j \right) \left(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{i i'} \right) \times \exp\left(\sum_{i \in J} \xi(x, p_i) - \xi(x, q_i) \right)$$

con $a_{i,i'} = \dfrac{(p_i - p_{i'})(q_i - q_{i'})}{(p_i - q_{i'})(q_i - p_{i'})}$

En esta solución ponemos

$$q_i = -p_i \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$$

entonces la solución ya no depende de las variables pares $\Rightarrow$ las soluciones n-soliton de KdV.

7.2 El grupo de la jerarquía KdV

En vista de la condición $q_j = -p_j$ en las soluciones de n-solitones de la KdV tratamos de ver que significa esto para nuestras construcciones de operadores vértice en el Cap. 6 :

$$p^2 = q^2 \iff q = \pm p$$

y obtenemos en

$$Z(p,p) = \psi(p)\,\psi^*(p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n\, p^{-n-1}$$

$$\begin{cases} -n\, x_{-n} & \text{si } n<0 \\ \partial_n & \text{si } n>0 \end{cases}$$

$$Z(p,-p) = \frac{1}{2p}\Big(\exp\big(\xi_{odd}(2x,p)\big) \times \exp\big(\xi_{odd}(-2\partial_x, p^{-1})\big) - 1\Big)$$

En términos de álgebras de Lie

esto significa que en lugar de "matrices" "genéricas"

$$X_A = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}+1/2} a_{m,n}\, \psi_{-m}\, \psi_n^*$$

$$\in \mathfrak{a}_\infty$$

tenemos que considerar ahora matrices periódicas con

$$a_{m+2,\,n+2} = a_{m,n}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & a_{-1} & a_0 & a_1 & & 0 & \\ & & a'_{-1} & a'_0 & a'_1 & & \\ & & & a_{-1} & a_0 & a_1 & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Claramente tales matrices están determinadas si conocemos dos renglones consecutivos

El álgebra de Lie que corresponde a este tipo de matrices es el ejemplo más sencillo de un álgebra de Lie de tipo Kac-Moody afín y se llama $\widehat{sl}_2$,

$$\widehat{sl}_2 = \left(sl_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right) \oplus \mathbb{C} \cdot K$$

matrices 2×2
con traza 0

con el corchete

$$[X(t), Y(t)] = X(t)Y(t) - Y(t)X(t)$$

$$+ \operatorname{Res}\Big|_{t=0} \operatorname{Tr} \frac{\partial X}{\partial t}(t)\cdot Y(t)\Big) \cdot K$$

$$[K, X(t)] = 0$$

este álgebra de Lie encaja en nuestras matrices periódicas

$$\hat{sl}_\infty \hookrightarrow \mathfrak{a}_\infty \subset \mathcal{A}$$

$$X_{ij} \otimes t^m \longmapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} X_{ij} :\psi_{-(i-1/2+2(m+\ell))} \times \psi^*_{j-1/2+\ell}:$$

$$K \longmapsto 1_{\mathcal{A}}$$

define un hom. inyectivo de álgebras de Lie!

Con el operador de Vértice $Z(\mu_1 - \mu)$ podríamos transportar eso a una representación de $\hat{sl}_2'$ sobre $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$!

La idea es que con el grupo correspondiente $\hat{SL}_2(\mathbb{C})$ podamos ~~p~~ transportar la órbita $\Phi(\hat{SL}_2(\mathbb{C})|1\rangle)$ a formar el conjunto de soluciones polinomiales de la jerarquía de KdV !