8. Grassmannianas de dimensión finita

8.1. Grassmannianas de dimensión finita

Denotamos con $\text{Grass}_{\mathbb{C}}(r, N)$ el conjunto de subespacios de dimensión r de $\mathbb{C}^N$

<u>Obs.</u> $\text{Grass}(1, N) = \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$

el espacio projectivo de dim. $N-1$ ya que $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$ es por definición el espacio de todas las rectas en $\mathbb{C}^N$ que pasan por el origen.

Entonces, cada punto de este espacio es determinado por un vector no nulo

$v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

y para cada $\lambda \in \mathbb{C}^*$ λv determina la misma recta.

$\rightsquigarrow [v_1 : v_2 : \dots : v_N]$ el. de $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$

"coordenadas projectivas"

Si queremos "formas normales" para los elementos de $\mathbb{P}^{N-1}$

$[1 : v_2 : v_3 : \dots v_N] \cong \mathbb{C}^{N-1}$

$[0 : 1 : v_2 : \cdots v_N] \cong \mathbb{C}^{N-2}$

$\vdots$

$[0 : \cdots : 0 : 1] \cong \{pt\} \cong \mathbb{C}^0$

$\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C}) \text{ "=" } \mathbb{C}^{N-1} \cup \mathbb{C}^{N-2} \cup \cdots \cup \{pt\}$.

Más generalmente $V \in \mathrm{Grass}(r, \mathbb{C}^N)$ está determinado por una matriz

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{r1} & \cdots & & v_{rN} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{r \times N}(\mathbb{C})$$

con rango r. Podemos pensar que los renglones de

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

son una base de V.

En este caso si $g \in GL_r(\mathbb{C})$ entonces

$[g \cdot \underline{v}]$ determina el mismo punto de $Grass(r, N)$

Esto sugiere el siguiente tipo de formas normales para los elementos de $Grass(r, N)$!

Para $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N$ podemos considerar las matrices de la forma

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & i_1 & & & & i_2 & & & & i_3 & & \cdots & & i_r & & & \\
\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & * & \cdots \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & 0 & & & & & \cdots & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & * & & * & 0 & & & \\
0 & & 0 & 0 & & & & & & & & & 0 & & 0 & 1 & * & * & *
\end{pmatrix}$$

Las matrices de esta forma para algún tuplo $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ se llaman celdas de Schubert de $Gr(r, N)$.

Cada celda de Schubert es isomorfa a un espacio afín ($\mathbb{C}^{d(i_1, \dots, i_r)}$)

La celda más grande corresponde a $(i_1, \dots, i_r) = (1, 2, \dots, r)$

$$r\left\{\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & 0 & * & \cdots & * \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & 1 & * & \cdots & * \end{array}\right)\right. \quad \rightsquigarrow \text{dim } r \times (N-r)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{N-r}$$

tiene la dimensión de $Grass(r, N)$

Otra forma un poco más abstracta de ver a las Grassmannianas es lo siguiente:

$$P_r := \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{GL_r} & 0 \\ * & \boxed{GL_{N-r}} \end{pmatrix} \right\} < GL_N(\mathbb{C})$$

y se puede ver que

$$Gr(r,N) \text{ "}=\text{" } GL_N(\mathbb{C})/P_r$$

(clases laterales)!

P_r se llama un subgrupo "parabólico" máximo de $GL_N(\mathbb{C})$

8.2. Inmersión de Plücker

Observación de J. Plücker (1865)

$$p: Gr_{\mathbb{R}}(2,4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^6)$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{14} \\ v_{21} & \cdots & v_{24} \end{pmatrix} \longmapsto [d_{12}(v) ; d_{13}(v) ; \cdots ; d_{34}(v)]$$

donde $d_{ij}(v) = \begin{vmatrix} d_{1i} & d_{1j} \\ d_{2i} & d_{2j} \end{vmatrix}$

$$\rightarrow ([v_{12} : v_{13} : v_{14} : v_{23} : v_{24} : v_{34}])$$

$$\in \operatorname{Im}(p) \iff$$

$$v_{12} v_{34} - v_{13} v_{24} + v_{14} v_{23} = 0$$

H. Grassmann generalizó esto a;

$$p : \operatorname{Grass}_K(r, N) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\Lambda^r (K^N)\right)$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \longmapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r]$$

en coordenadas p, la inmersión de Plücker-Grassmann se ve así:

Si $e_1, e_2, \ldots, e_N$ es la base estándar de K^N entonces $\Lambda^r(K^N)$ tiene la base

$$(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r})$$

donde

$$1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N$$

parametriza los subconjuntos de r elementos de $\{1,2,\ldots,N\}$ en términos de esta base

$$\tilde{p}(\underline{v}) = [(d_{\underline{i}}(\underline{v}))\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}]$$

donde $d_{\underline{i}}(v) := \begin{vmatrix} v_{1 i_1} & v_{1 i_2} & \cdots & v_{1 i_r} \\ v_{2 i_1} & & & \\ \vdots & & & \\ v_{r i_1} & - & - & v_{r i_r} \end{vmatrix}$

<u>Obs.</u> Si $\underline{v}' = g\,\underline{v}$ entonces

$$v_1' \wedge v_2' \wedge \dots \wedge v_r' = \det(g) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_r$$

Antes de caracterizar la imagen de p en esta generalidad necesitamos un poco más de álgebra (multi-) lineal

Def.: a) Sea V un K esp. vectorial, entonces un mapeo

$$f: \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r} \longrightarrow W$$ es

r-multilineal si es K-lineal en cada uno de sus r argumentos.

Si además tenemos que $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$

$$= (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} f(v_1, \ldots, v_r)$$

para todo $\sigma \in S_r$ (grupo simétrico entonces f se llama alternante.

Es un resultado estándar que en el caso que $r > \dim V$ y $f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \to W$ es alternante, entonces $f \equiv 0$

(compara la definición abstracta del determinante!)

b) Una familia

$(v_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$

de elementos de K $(\mathrm{char}(K) \neq 2)$

se llama antisimetrica en los índices $\underline{i}$ si

$$v_{\sigma(\underline{i})} = (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} v_{\underline{i}}$$

para todo $\sigma \in S_r$

En particular $v_{\underline{i}} = 0$ si $i_a = i_b$ para algún $a \neq b$

donde $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$

Con esto podemos enunciar el resultado clave

Lema (relaciones de Plücker-Grassmann simples)

Sea K un campo con $\mathrm{char}(K) \neq 2$

Para $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \{1, 2, \ldots, N\}^r$

consideramos función

$$d_{\underline{i}} : \mathrm{Mat}_{r \times N}(K) \longrightarrow K$$

$$\underline{v} \longmapsto \begin{vmatrix} v_{1 i_1}, v_{1 i_2}, \ldots, v_{1, i_r} \\ \\ v_{r, i_1} \text{ - - - - - - } v_{r, i_r} \end{vmatrix}$$

a) Para cada $\underline{v} \in \mathrm{Mat}_{r \times N}(K)$

la familia

$$\left(f_{\underline{i}}(\underline{v})\right)_{\underline{i}\in\{1,\dots,N\}^r}$$ es

antisimétrica en los índices,

b) Para cada $k \in \{1,\dots,r\}$

y $\underbrace{i_1, i_2, \dots, i_r}_{\underline{i}}, \underbrace{j_1, \dots, j_r}_{\underline{j}} \in \{1,\dots,N\}$

se tiene

$$(8.2)\quad f_{\underline{i}}\, f_{\underline{j}} = \sum_{l=1}^{r} f_{i_1\dots i_{k-1}\, j_l\, i_{k+1}\dots i_r} \times f_{j_1\dots j_{l-1}\, i_k\, \dots\, j_r}$$

ℓ

c) Si una familia $(v_{\underline{i}})_{\underline{i}\in\{1,\dots,N\}^r}$ de elementos de K es antisimétrica en los índices y cumple las relaciones (3.2) entonces existe un $\underline{v}\in Mat_{r\times N}(K)$ con

$$f_{\underline{i}}(\underline{v}) = v_{\underline{i}} \quad \forall\, \underline{i}\in\{1,\dots,N\}^r$$

Obs. Las relaciones de Plücker Grassmann (simples) (8,2) son equivalentes al siguiente sistema de relaciones:

Para $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, j_1, j_2, \dots, j_{r+1}$ $\in \{1, \dots, N\}$ se tiene

(8-3)

$$\sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{l-1} f_{i_1,\dots,i_{r-1},j_l} \, f_{j_1,\dots,\hat{j_l},\dots,j_r} = 0$$

<u>Dem</u> a) Está claro por las propiedades básicas de determinantes.

b) fijamos $i_1, i_2, \dots, i_r$ y consideramos la función

$$g: \underbrace{K^r \times \dots \times K^r}_{r+1} \longrightarrow K$$

$$(w^{(1)}, \dots, w^{(r+1)}) \longmapsto \sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{l-1} \left| (v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_{r-1})}, w^{(1)}) \right| \times \left| (w^{(2)}, w^{(3)}, \dots, w^{(r+1)}) \right|$$

entonces g es $r+1$ - multilineal y alternante

$\Rightarrow$ $\underline{g \equiv 0}$ - ver obs. en Def a)

$\Rightarrow$ el lado izquierdo de (8.3) es 0.

c) Si $v_{\underline{i}} = 0 \ \forall \underline{i}$ entonces la afirmación es trivial. De otra forma podemos suponer que $v_{1,2,\ldots,r} = 1$ y en este caso definimos

$$\boxed{w_{i,j} := v_{1,2,\ldots,i-1,j,i+1,\ldots,r}} \quad \forall \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,r \\ j = 1,2,\ldots,N \end{array}$$

$\Rightarrow w_{i,j} = \delta_{i,j}$ para $i,j \in \{1,2,\ldots,r\}$

$\Rightarrow \underline{w} = (w_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,N}}$ tiene rango r

Además definimos

$$\boxed{w_{\underline{i}} := f_{\underline{i}}(\underline{w}) \quad \forall \ \underline{i} \in \{1,\ldots,N\}^r}$$

y nuestra tarea es demostrar

(*) $w_{\underline{i}} = v_{\underline{i}}$ (si v_* cumple rel. de Plücker) para todo $\underline{i}$. Obviamente podemos suponer $i_a \neq i_b$ para $a \neq b$ (de otra forma ambos lados son 0) y definimos

$$\{j_1, j_2, \dots, j_s\} = \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$$

y $$\{k_1, k_2, \dots, k_s\} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \setminus \{1, 2, \dots, r\}$$

donde acordamos

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq r \quad ,$$

$$r < k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq N$$

re-ordenamos $\underline{i}$ como sigue:

(**) $$\underline{i} = (\overset{i_1}{1}, 2, \dots, j_1 - 1, \overset{i_{j_1}}{k_1}, j_1 + 1, \dots, j_2 - 1, k_2, j_2 + 1, \dots, j_s - 1, \overset{i_{j_s} = i_t}{k_s}, j_s + 1, \dots, r)$$

Con esto es fácil ver que

$$(**)\quad w_{\underline{i}} = \begin{vmatrix} w_{j_1 k_1} & \cdots & w_{j_1 k_s} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{j_s k_1} & \cdots & w_{j_s k_s} \end{vmatrix} \qquad \left(w_{ij} = \delta_{ij} \text{ para } i,j \in \{1,\dots,r\} \right)$$

Ahora procedemos con la demostración de nuestra afirmación $(*)$ por inducción sobre s

$\underline{s=0} \iff \underline{i} = (1,2,\dots,r)$ trivial

$\underline{s=1} \implies \underline{i} = (1,2,\dots,j-1,k,j+1,\dots,r)$ con $k>r$

$\overset{(**)}{\implies} w_{\underline{i}} = w_{jk} = v_{\underline{i}}$ ✓

$\underline{s>1}$ Por hip. de ind. suponemos que $(*)$ es válido para todo $\underline{i}'$ con $s' := s(\underline{i}') < s$.

Por las relaciones de Plücker entre los $v_{\underline{i}}$'s tenemos

$$v_{\underline{i}} \cdot v_{12\ldots r} = \sum_{\ell=1}^{r} \underbrace{v_{i_1,\ldots,i_{t-1},\ell,i_{t+1},\ldots,i_n}}_{=0 \text{ si } \ell \notin \{j_1,\ldots,j_n\} \text{ par antisim}} \cdot v_{1,2,\ldots,\ell-1,i_t,\ell+1,\ldots,r}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} v_{i_1,\ldots,i_{t-1},j_\ell,i_{t+1},\ldots,i_n} \cdot \underbrace{v_{1,2,\ldots,j_\ell-1,k_n,j_\ell+1,\ldots,r}}_{=w_{j_\ell k_n}}$$

$$\overset{\text{lin. de ind}}{=} \sum_{\ell=1}^{n} w_{i_1\ldots i_{t-1} j_\ell i_{t+1}\ldots i_n} \cdot w_{j_\ell k_n}$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{\ell=1}^{n} \begin{vmatrix} w_{j_1k_1} & \cdots & w_{j_1k_{n-1}} & w_{j_1j_\ell} \\ \vdots & & & \\ w_{j_\ell k_1} & \cdots & w_{j_\ell k_{n-1}} & w_{j_\ell j_\ell} \\ \vdots & & & \\ w_{j_nk_1} & \cdots & w_{j_nk_{n-1}} & w_{j_nj_\ell} \end{vmatrix} \cdot w_{j_\ell k_n}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l} \begin{vmatrix} w_{j_1 z_1} & \cdots & w_{j_1 z_{n-1}} \\ \vdots & & \\ w_{j_{l-1} z_1} & \cdots & w_{j_{l-1} z_{n-1}} \\ w_{j_{l+1} z_1} & \cdots & w_{j_{l+1} z_{n-1}} \\ \vdots & & \\ w_{j_n z_1} & \cdots & w_{j_n z_{n-1}} \end{vmatrix} w_{j_l z_n}$$

$$= \begin{vmatrix} w_{j_1 z_1} & \cdots & w_{j_1 z_{n-1}} & w_{j_1 z_n} \\ \vdots & & & \\ w_{j_l z_1} & & w_{j_l z_{n-1}} & w_{j_l z_n} \\ \vdots & & & \\ w_{j_n z_1} & & w_{j_n, z_{n-1}} & w_{j_n z_n} \end{vmatrix} \qquad \square$$

<u>Ejercicio 8.3:</u>

El mapeo p: $\operatorname{Gras}_K(r, N) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r (K^N))$

$$[\underline{v}] \longmapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r]$$

es inyectivo.

$\Longrightarrow$

<u>Teorema</u> Como variedad algebraica $\mathrm{Gross}_{\mathbb{C}}(r, N)$ es isomorfa al subconjunto cerrado de $\mathbb{P}(\Lambda^r(\mathbb{C}^N))$ que está definida por las relaciones de Plücker (8.3).

<u>Dem.</u> p es inyectivo por el ejercicio y por el Lema $\mathrm{Im}(p)$ es exactamente el conjunto de ceros simultaneos de todas las rel. de Plücker.

<u>Obs.</u> Identificamos en el lenguaje de geometría algebraica

$$\mathbb{P}(\Lambda^r(\mathbb{C}^N)) = \mathrm{Proj}\left(\mathbb{C}\left[(X_{\underline{i}})_{\underline{i} = (i_1 < i_2 < \dots < i_r)} \right] \right)$$

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{}$ S

donde consideramos a S como $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado
con $\deg(X_{\underline{i}}) = 1 \ \forall \underline{i}$

En S todas las relaciones de Plücker

$$\sum_{\ell=1}^{r} (-1)^{\ell-1} X_{i_1 \dots i_{r-1} j_\ell} X_{j_1 \dots \hat{j_\ell} \dots j_{r+1}} = 0$$

son homogeneas de grado 2 $(P_{\underline{i}, \underline{j}})$

si acordamos $X_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} X_{\underline{i}}$

Ojo: En general hay polinomios homogeneos que se anulan en $\mathrm{Im}(\tilde{p})$

i.e. en todos los

$(v_{\underline{i}})$ $\underline{i} = (i_1 < i_2 < \dots i_r)$ que cumplen las rel. de Plücker

pero que no pertenecen al ideal de S que esta generado por los polinomios de Plücker $(P_{\underline{i},\underline{j}})$. Ejemplo

Esto significa que

$S/(P_{\underline{i},\underline{j}} \mid (\underline{i},\underline{j}))$ contiene

elementos nilpotentes.

Para definir el anillo de

coordenadas homogéneas de

$Grass_{\mathbb{C}}(r, N)$ en la inmersión

de Plücker se ocupan también

las relaciones de Plücker que

ocupan más intercambios ...