Cap. 9 resumen y cont

Resumen $N \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\mathcal{A}_N := \mathbb{C}\langle \psi_i, \psi_i^* \mid_{\substack{i \in \mathbb{Z}+1/2 \\ |i|<N}} \rangle / \langle \text{ferm} \rangle$$

$$\cong \mathrm{Mat}_{2^{2N} \times 2^{2N}}(\mathbb{C})$$

y el único $\mathcal{A}_N$ - módulo simple

es $\Lambda V_N^* = \bigoplus_{j=0}^{2N} \Lambda^j V_N^*$

con $V_N^* := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}+1/2,\, |j|<N} \mathbb{C}\psi_j^*$

$$\psi_i^* \cdot \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_j}^* = \psi_i^* \wedge \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_j}^*$$

$$\psi_i \cdot \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_j}^* = \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{\ell} [\psi_i, \psi_{i_\ell}^*]\, \psi_{i_1}^* \wedge \dots \widehat{\psi_{i_\ell}^*} \wedge \dots \psi_{i_j}^*$$

$$|\mathrm{vac}\rangle = \psi_{1/2}^* \wedge \psi_{3/2}^* \wedge \dots \wedge \psi_{N-1/2}^*$$

$$T_2 : \overset{\text{inv}}{\mathcal{U}}(\mathcal{A}_N) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_N)$$

$$g \longmapsto (a \longmapsto g a g^{-1})$$

hom. de grupos con

$$\mathrm{Ker}(T_2) = \mathbb{C}^* \cdot 1_{\mathcal{A}}$$

$$W_N := V_N \oplus V_N^*$$

$$V_N = \bigoplus_{\substack{j \in \mathbb{Z}+1/2 \\ |j| \leq N}} \mathbb{C}\,\psi_j$$

$$G(W_N) = \{ g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}_N) \mid T_g(W_N) = W_N \}$$

$$\leq \mathcal{U}(\mathcal{A}_N)$$

$$O(W_N) = \{ T \in GL(W_N) \mid$$

$$[T(w), T(w')]_+ = [w, w^+]_+$$

$$\forall\, w, w' \in W_N \}$$

$$\leq GL(W_N)$$

Teorema $\pi : G(W_N) \longrightarrow O(W_N)$

$$g \longmapsto T_g|_{W_N}$$

es un homomorfismo suprayectivo con $\ker(\pi) = \mathbb{C}^* 1_{\mathcal{A}}$. $\square$

Si $g = (g_{ij})_{\substack{i,j \in \mathbb{Z}+1/2 \\ |i|, |j| \leq N}} \in GL(V_N)$

definimos $\hat{g}$ con $\hat{g}_{ij} = g_{-i,-j}$

entonces $\begin{pmatrix} \hat{g}^{-T} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \in O(W_N)$

$\therefore \; GL_N \hookrightarrow O(W_N)$, $g \mapsto \begin{pmatrix} \hat{g}^{-T} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$

hom. inyectivo de grupos

$$\tilde{G}_N := \pi^{-1}\big(\underbrace{\iota(GL(U_N))}_{\subset O(W_N)}\big)$$

<u>Lema</u> $g \in GL(V_N)$, entonces existe $\tilde{g} \in \tilde{G}_N$

t.q. $\pi(\tilde{g}) = \iota(g)$

$\cdot \; \tilde{g} \cdot \varphi^*_{i_1} \wedge \dots \psi^*_{i_r}$

(*) $\cdot \quad = g\varphi^*_{i_1} \wedge g\psi^*_{i_2} \wedge \dots \wedge g\psi^*_{i_r}$

Dem. $\mathcal{A}_N \cong \mathrm{Mat}_{2^{2N} \times 2^{2N}}(\mathbb{C})$

$$2^{2N} = \dim \tilde{F}_N$$

entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{A}_N$ tal que

$\tilde{g}$ cumpla $(*)$

además $\tilde{g}$ es invertible (!)

Tenemos que verificar que:

$$T_{\tilde{g}}(\psi_i^*) = g\,\psi_i^* \quad \forall i$$

Para eso calculamos:

$$\underbrace{T_{\tilde{g}}(\psi_i^*)}_{\in \mathcal{A}_N} \cdot (\psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}^*)$$

$$= \tilde{g}\, \psi_i^* \tilde{g}^{-1} \cdot \left(\psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}^* \right)$$

$$= \tilde{g} \cdot \psi_i^* \cdot \left(g^{-1} \psi_i^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}^* \right)$$

$$= \tilde{g} \left(\psi_i^* \wedge g^{-1} \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}^* \right)$$

$$= g \psi_i^* \wedge \psi_{i_1} \wedge \dots \psi_{i_r}^*$$

$$= g \psi_i^* \cdot \left(\underbrace{\psi_{i_1}^* \dots \psi_{i_r}^*}_{\forall \in \text{ base de } \tilde{S}\,U} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad g \psi_i^* = T_{\tilde{g}} \left(\psi_i^* \right) \qquad \square$$

Para $u \in \hat{\mathcal{F}}_N$ definimos

$$\mathrm{Ann}_{V_N^*}(|u\rangle) := \{ v \in V_N^* \mid v \cdot |u\rangle = 0 \} \subseteq V_N^*$$

subesp.

Por ejemplo si $v_1, \dots, v_r \in V_N^*$ son lin. independientes entonces

$$\mathrm{Ann}_{V_N^*}(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C} v_i =: V$$

$(v_i \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} = 0$

y si $v \in V_N \setminus V$ entonces

$(v, v_1, \dots, v_r)$ son lin. ind,

$\Rightarrow v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_r \neq 0$

<u>Lema</u> a) Para ~~cada~~ $v \in \mathcal{F}_N$, $g \in GL(V_N^*)$

sea $\tilde{g} \in \tilde{G}_N$ t.q. $\pi(\tilde{g}) = c(g)$

entonces

$$\mathrm{Ann}_{V_N^*}(\tilde{g}\, v) = g \cdot \mathrm{Ann}_{V_N^*}(v)$$

b) Si $0 \neq v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r V_N^*$

entonces

$$\mathrm{Ann}_{V_N^*}(\tilde{g}\, v) = \mathrm{Ann}_{V_N^*}(v)$$

$$\iff \tilde{g}\, v \in \mathbb{C}^* \cdot v$$

<u>Dem:</u> a) Sea $a \in \mathrm{Ann}_{V_N^*}(v)$

$\iff a \wedge v = 0$

entonces

$$g a \wedge (\tilde{g}\, v) = \tilde{g} a \wedge \tilde{g} \wedge \cdots \wedge \tilde{g}\, v$$

$$= \tilde{g}(a \wedge v) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}\, \mathrm{Ann}_{V_N^*}(v) \subset \mathrm{Ann}_{V_N^*}(\tilde{g}\, v)$$

La otra inclusión es similar.

b) "$\Leftarrow$" claro

"$\Rightarrow$" Por hipótesis y nuestras observaciones tenemos

$$\tilde{g} \cdot v = g v_1 \wedge \dots \wedge g v_r \rangle$$

$$\mathbb{C} g v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} g v_r = \mathbb{C} v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} v_r$$

$\Leftrightarrow \exists\, h = (h_{ij}) \in GL_r(\mathbb{C})$ t.q.

$$g v_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ji} v_j \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$\Rightarrow g v_1 \wedge \dots \wedge g v_r = \det(k)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ $\square$

<u>Cor</u> Sea $V_r := \tilde{G}_N(\underbrace{\psi^*_{+1/2-r} \wedge \dots \wedge \psi^*_{N-1/2}}_{|r\rangle})$

$(r \in 1-N, \dots, N-1)$

$|0\rangle = |vac\rangle$

Entonces el mapeo

$\alpha_r : V_r \longrightarrow Gr(r, V_N^*)$

$$\tilde{\hat{g}} \cdot |v\rangle \longmapsto \mathrm{Ann}_{V_N^*}(\tilde{\hat{g}}|v\rangle)$$

es suprayectivo $>$

$$\alpha_v(\tilde{\hat{g}}|v\rangle) = \alpha_v(\tilde{\hat{g}}'|v\rangle)$$

$$\iff \tilde{\hat{g}}'|v\rangle \in \mathbb{C}^* \, \tilde{\hat{g}}^*|v\rangle,$$

(fácil del Lema)

Obs ([Kac, Ej 14.32])

Un argumento similar demuestra:

Sea $V_0 = GL_\infty |vac\rangle \subset F_0$

$$Gr_{0,\infty} := \Big\{ V \subset \underbrace{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \mathbb{C}\,\psi_j^*}_{V^*} \;\Big|\; V \supset V_\ell^* \;\urcorner\; \lim_{\ell\to\infty} \left(\dim V/V_\ell - \ell\right) = 0 \Big\}$$

$$V_\ell := \bigoplus_{j>\ell} \mathbb{C}\,\psi_j^*$$

entonces el mapeo

$$\alpha_v : V_0 \longrightarrow Gr_{0,\infty}, \quad v \longmapsto \mathrm{Ann}_{V^*}(v)$$

es suprayectivo $\urcorner$

$$\alpha_0(v) = \alpha_0(v') \iff v' \in \mathbb{C}^* v,$$

9.2. Relaciones de Plücker y identidad bilineal

Sea $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $\mathcal{I}_N$ el conjunto de todas las sucesiones

$$I = (i_1 < i_2 < \dots < i_N)$$

con $i_j \in \mathbb{Z} + 1/2$, $-N + 1/2 \leq i_1$

$i_r \leq N - 1/2$

ψ y abreviamos

$$\psi_I^* := \psi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}^*$$

$\Rightarrow (\psi_I^*)_{I \in \mathcal{I}_r}$ base $\Lambda^r V_N^*$

Similarmente al Cap. 6(?) podemos demostrar que

$$v = \sum_{I \in \mathcal{I}_r} v_I \psi_I^* \in \tilde{G}_N \mid v >$$

$\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}+1/2 \\ |i|<N}} \psi_{-i} v \otimes \psi_i^* v}_{\Lambda^{r-1} V_N^* \otimes \Lambda^{r+1} V_N^*} = 0$$

De hecho, la rel. bilineal es equivalente a que las componentes v_I de v cumplan las rel. de Plücker:

Para eso calculamos

$$\psi_{-i} v \otimes \psi_i^* v =$$

$$\sum_{I, I' \in \mathcal{J}_r} v_I \, v_{I'} \; \psi_{-i} \cdot \psi_{I'}^* \otimes \psi_i^* \cdot \psi_I^*$$

Por eso, $J \in \mathcal{J}_{r-1}$, $K \subset \mathcal{J}_{r+1}$

el coeficiente de $\sum \psi_{-i} v \otimes \psi_i^*$ o

en $\psi_J^* \otimes \psi_K^* \in \Lambda^{r-1} V_N^* \otimes \Lambda^{r+1} V_N^*$

(salvo un signo)

una relación de Plücker:

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+r-1} v_{(j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, k_i)} \cdot v_{k_1, \dots, \hat{k_i}, \dots, k_{r+1}}$$

9.3. τ-funciones y polinomios de caracter

Res $\Phi : \mathcal{F}_0 \hookrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$

$$\psi^*_{\underline{m}} \longmapsto S_Y(\underline{m})$$

diag. de Maya

$\cup$

$V_0 = Gl_\infty |vac\rangle$

pol. de car.

sol. pol. de la jerarquía KP

el lazo rel. de Hirota

Para $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$

se tiene

$$f(x) = \sum_{\gamma} \underbrace{\left(S_\gamma(\tilde{\partial}) f \Big|_{x=0} \right)}_{\text{coord. de Plücker de } f} S_\gamma(x)$$

y f es una función $\in$

$\iff$ los $S_\gamma(\tilde{\partial}) f \big|_{x=0}$

cumplen las relaciones de Plücker

$\square$