Semestre 2023/1

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 2

Ejercicio 6
Sea G un grupo finito con subgrupos A, B y C. Demuestra:

(a) $B \subset A$ implica $[A : B] \geq [C \cap A : C \cap B]$. Pista: trata de definir un mapeo inyectivo entre las clases laterales correspondientes.

(b) $[G : A \cap B] \leq [G : A] \cdot [G : B]$.

(c) Sea $B \subset A$. Si $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de G con respecto a A, además $y_1, \ldots, y_m$ un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de A con respecto a B, entonces $\{x_i y_j\}_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ es un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de G con respecto a B.

(d) $A \cup B$ es un subgrupo de G si y solamente si $A \subset B$ o $B \subset A$.

(e) Si $g \cdot g = e$ para todo $g \in G$ entonces G es abeliano.

Ejercicio 7
Sea $G = (G, \cdot)$ un grupo. Demuestra:

(a) Si $H < G$ con $[G : H] = 2$ entonces H es normal en G.

(b) Sean $N_1, N_2, \ldots, N_k$ subgrupos normales de G, y $D := \cap_{i=1}^k N_i$. Entonces G/D es isomorfo a un subgrupo de $G/N_1 \times G/N_2 \times \cdots \times G/N_k$.

(c) Hay precisamente dos clases de isomorfía de grupos de orden 4.
Pista: Sea G un grupo de orden 4. Verifica que si G no es cíclico, $g^2 = e$ para todo $g \in G$. Usa (b).

(d) Sea $N \lhd G$ con $[G : N] = 4$, entonces G tiene un subgrupo normal M con $[G : M] = 2$. Pista: Utiliza (c).

(e) Se dice que G es *simple* si solo los subgrupos triviales $\{e\}$ y G son normales. Sea en este caso $\phi\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos. Si $|G| \neq 2$ y $A < H$ con $[H : A] = 2$ entonces $\mathrm{Im}(\phi) < A$.

Ejercicio 8
Sea $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ el grupo de las matrices invertibles de tamaño 2×2 sobre los números complejos, y

$$Q := \langle \{ \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \} \rangle < G$$

el grupo cuaternio. Demuestra:

(a) $|Q| = 8$;

(b) $|Z(Q)| = 2$;

(c) todos los elementos de $Q \setminus Z(Q)$ tienen orden 4;

(d) Q tiene precisamente un elemento de orden 2;

(e) todo subgrupo de Q es normal.

Ejercicio 9
Calcula la tabla de multiplicación del grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$ y demuestra que $\mathfrak{S}_3$ es isomorfo a un producto semidirecto de grupos cíclicos $C_3 \rtimes_\psi C_2$ (donde C_k denota un grupo cíclico con $|C_k| = k$). Describe el homomorfismo $\psi \colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$.

Ejercicio 10
Sea G un grupo con elemento neutro e con $N \lhd G$ un subgrupo normal de G, y $H < G$ un subgrupo. Entonces son equivalentes:

(i) $G = NH$ y $N \cap H = \{e\}$.

(ii) La restricción a H de la proyección canónica $\pi \colon G \to G/N$ induce un isomorfiso entre H y G/N.

(iii) G es isomorfo al producto semidirecto $N \rtimes_\phi H \cong G$ para algun homomorfismo de grupos $\phi \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$.

A discutir en la Ayudantía a partir del 2 de Septiembre.