Semestre 2023/1

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 7

Ejercicio 30
Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{z^2 \mid z \in \mathbb{N}_0\}$ y

$$Q_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad R_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $x = a+b\sqrt{n} \in Q_n$, la *norma* $N(x)$ de x es $N(x) := a^2 - nb^2$. Demuestra:

(a) R_n es subanillo de $\mathbb{C}$ y un dominio entero. Q_n es el campo de fracciones de R_n

(b) $x \in R_n$ es una unidad si y solamente si $N(x) \in \{1, -1\}$.

(c) $(R_n)^* = \{1, -1\}$ si $n < -1$. Trata de visualizar en el plano $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ las unidades de R_n para $n > 1$.

(d) Los elementos $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ de R_{-5} son irreducibles. Ninguno de estos cuatro elementos es asociado a otro de estos elementos.

(e) $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y concluya que en R_{-5} hay elementos irreducibles que no son primos.

Ejercicio 31
Consideramos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R_{-5}$ el ideal $\mathfrak{p} := (2, 1 + \sqrt{-5})$. Demuestra:

(a) $\mathfrak{p}$ no es un ideal principal. Pista: Recuerda que $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es irreducible.

(b) $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, además es el único ideal primo que contiene a (2). Pista: Verifica que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\mathfrak{p} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 32
Sea K un campo.

(a) Sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ con $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ y $(y_0, y_1 \ldots y_n)$ una familia de elementos en K. Demuestra que existe un *único* polinomio

$p \in K[X]$ con $\deg(p) \leq n$ y $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Pista: Considera

$$p^{(i)} := \prod_{j \in \{0,1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in K[X]$$

para $i = 0, 1, \ldots, n$.

(b) Denotamos con $\mathrm{Map}(K, K)$ el conjunto de todos los mapeos $K \to K$, y recordamos que $\mathrm{Map}(K, K)$ es un anillo conmutativo con la adición y multiplicación por componentes.

Demuestra que $\mathrm{ev}\colon K[X] \to \mathrm{Map}(K, K), f \mapsto (x \mapsto f(x))$ es un homomorfismo de anillos. Pista: Demuestra primero que para todo $x \in K$ el mapeo $\mathrm{ev}_x : K[X] \to K, f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de anillos.

(c) Demuestra que ev es suprayectivo pero no inyectivo si K es finito.

(d) Demuestra que ev es inyectivo pero no suprayerctivo si K es infinito.

La meta de los siguientes dos ejercicios es la construcción de un ejemplo de un anillo de ideales principales que no sea Euclidiano. Nos basamos en una serie de ejercicios de G. Bergman de la universidad de California en Berkeley que dan pistas para resolver el Ejercicio III.3.8. en el libro de Hungerford.

Sea $\alpha := (1 + \sqrt{-19})/2$ y R el subanillo unitario más pequeño de $\mathbb{Z}$ que contenga a α.

Ejercicio 33
Veremos primero que R no es Euclidiano.

(a) Verifica: $\alpha^2 - \alpha + 5 = 0$,
$R = \{m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{m + n\bar{\alpha} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ con $\bar{\alpha}$ el conjugado complejo de α,
$R \to \mathbb{N}_0, r \mapsto |r|^2$ es un mapeo bien definido que respeta la multiplicación.

(b) Demuestra que las únicas unidades en R son 1 y -1. Pista: Encuentra $\min\{|\Im(r)| \mid r \in R \setminus \mathbb{Z}\}$ y concluya que $|x|^2 = 1$ para toda unidad x de R.

(c) Supongamos que d sea una función Euclidiana para R y $x \in R \setminus (\{0\} \cup R^*)$ tal que minimice el valor de d en este conjunto. Demuestra que el anillo cociente $R/(x)$ tiene a lo más 3 elementos. La ecuación $\alpha^2 -$

$\alpha + 5 = 0$ no tiene solución en un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, y a lo mas 3 elementos. Contradicción. Pista: los elementos del anillo cociente $R/(x)$ son de la forma $r + (x)$ con $r \in \{0\} \cup R^*$.

Ejercicio 34
Ahora veremos que R es un anillo de ideales principales. Para esto sea $\{0\} \neq I \subset R$ un ideal y $x \in I \setminus \{0\}$ un elemento de valor absoluto mínimo (en este conjunto). Demostramos en los incisos (a)-(e) abajo que $I = (x)$. Para esto consideramos el conjunto $J := x^{-1}I \subset \mathbb{C}$ y notamos que $R \subset J$ y $r \cdot j \subset J$ para todo $r \in R$ y $j \in J$.

(a) Verifica que es suficiente demostrar que $J = R$.

(b) Demuestra: Si $j \in J \setminus R$ entonces $\left|\Im(j) - z\sqrt{19}/2\right| \geq \sqrt{3}/2$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Pista: si para $j \in J$ existe $r \in R$ con $|j - r| < 1$, entonces $j \in R$.

(c) Verifica: si $J \setminus R \neq \emptyset$, entonces existe $y \in J \setminus R$ con $\Im(y) \in [\sqrt{3}/2, \sqrt{19}/2 - \sqrt{3}/2]$ y $\Re(y) \in (-1/2, 1/2]$.

(d) Demuestra que para un elemento y como en (c), $\left|\Im(2y) - \sqrt{19}/2\right| < \sqrt{3}/2$. Usa esto para concluir que $y \in \{\alpha/2, -\bar{\alpha}/2\}$, y por lo tanto $\alpha\bar{\alpha}/2 \in J$.

(e) Encuentra una contradicción.

(f) Analiza donde esta construcción falla si cambiamos 19 por 17 o 23 respectivamente.

A discutir en la ayudantía del 21 de octubre.