

Tarea 9**Ejercicio 38**

Sea K un campo, y $\mathbf{m} := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$. Demuestra:

- (a) $R := \{\mathbf{x} \in \text{Mat}(2 \times 2, K) \mid \mathbf{x}\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{x}\}$ es un subanillo conmutativo de $\text{Mat}(2 \times 2, K)$.
- (b) Existe un $f \in K[X]$ con $R \cong K[X]/(f)$.
- (c) R es un campo para $K = \mathbb{Q}$ y $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, pero no es un campo para $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Ejercicio 39

Sea K un campo, $K(X) := \text{Frac}(K[X])$ el campo de funciones racionales sobre K , y $f \in K[X]$ un polinomio con $\deg(f) = n \geq 1$. Demuestra que $K(X) \supset K(f)$ es una extensión algebraica de grado n .

Ejercicio 40

Sea $L \supset K$ una extensión algebraica, y $f \in L[X]$. Demuestra:

- (a) Si f es irreducible, entonces existe un único polinomio irreducible y mónico $g \in K[X]$, tal que $f \mid g$ en $L[X]$.
- (b) Si f no es necesariamente irreducible y $\deg(f) \geq 1$ existe un polinomio $g \in K[X] \setminus \{0\}$ con $f \mid g$ en $L[X]$.

Ejercicio 41

El objetivo de este ejercicio es la construcción de la cerradura algebraica de un campo, siguiendo E. Artin. Para eso hay que extender el siguiente croquis: Sea k un campo y Σ el conjunto de polinomios irreducibles y mónicos en $k[X]$. Consideramos $S = k[X_f \mid f \in \Sigma]$, es decir el anillo de polinomios cuyos indeterminadas están parametrizados por los elementos de Σ . Sea \mathfrak{a} el ideal de S que es generado por $\{f(X_f) \mid f \in \Sigma\}$. Demuestra que $1_S \notin \mathfrak{a}$. Utiliza el Lema de Zorn para demostrar que S tiene un ideal máximo \mathfrak{m} que contiene a \mathfrak{a} . Demuestra que $K_1 := S/\mathfrak{m}$ es una extensión de campo de k de tal forma que todo elemento de Σ tiene un cero en K_1 . Repite la construcción con K_1 en

lugar de k para obtener un campo K_2 etcétera. Demuestra que $L = \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ es un campo algebraicamente cerrado. Entonces \bar{k} , el conjunto de los elementos de L que son algebraicos sobre k , es una cerradura algebraica de k .

Ejercicio 42

Determina para los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ un conjunto generador para su campo de descomposición sobre \mathbb{Q} , y calcula en cada caso el grado de estos campos sobre \mathbb{Q} :

$$X^4 - 2X^2 + 9, \quad X^4 - 16X^2 + 4, \quad X^4 + 4, \quad X^3 - 7, \quad X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3$$

A discutir en la Ayudantía a partir del 4 de Noviembre.