Semestre 2023/1 Algebra Moderna

Christof Geiss

Tarea 10

Ejercicio 43
Sea $f = X^3 + X^2 - Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

(a) Demuestra que $A = \mathbb{Q}[X, Y]/(f)$ es un dominio entero que contiene a $\mathbb{Q}$ como un subanillo.

(b) Demuestra que el homomorfismo de anillos

$$\alpha \colon \mathbb{Q}[X] \to A \text{ determinado por } \alpha_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}} \text{ y } \alpha(X) = X + (f)$$

es inyectivo.

(c) ¿Es el campo de fracciones $\mathrm{Frac}(A)$ algebraico sobre $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 44
Sea $K(T)$ el campo de funciones racionales sobre un campo K, y $U := \frac{f}{g} \in K(T)$ una función racional no constante ($f, g \in K[T]$ con $\deg(f)+\deg(g) \geq 1$ y $\mathrm{mcd}(f, g) = K^*$). Demuestra:

(a) U es trascendente sobre K.

(b) $f(X) - Ug(X) \in (K(U))[X]$ es un polinomio irreducible con cero T en la extensión $K(T) \supset K(U)$.

(c) $K(U) = K(T)$ si y solamente si $\max\{\deg(f), \deg(g)\} = 1$.

(d) Los K-automorfismos σ de $K(T)$ son precisamente de la forma

$$\sigma(T) = \frac{aT + b}{cT - d} \quad (a, b, c, d \in K; ad - bc \neq 0)$$

Ejercicio 45
(Independencia lineal de caracteres). Sea K un campo, $K^* := K \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de K. Para un grupo G, un carácter de G en K es un homomorfismo de grupos $\varphi \colon G \to K^*$. Demuestra: Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son caracteres de G en K^* con $\varphi_i \neq \varphi_j$ para $i \neq j$, entonces $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ es una familia linealmente independiente en el espacio K^G de mapeos de G en K.
Instrucciones:

(a) Tenemos que demostrar que para elementos $a_1, \dots, a_n \in K$ el sistema de ecuaciones

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(g) = 0 \text{ para todo } g \in G$$

solo tiene la solución trivial.

(b) Procedemos por inducción sobre n. Verifica el caso $n = 1$.

(c) Para el paso $n-1 \mapsto n$ escogemos $h \in G$ con $\varphi_1(h) \neq \varphi_n(h)$. Multiplica por un lado $(*)$ con $\varphi_n(h)$ y por otro lado sustituya g por hg. Compara.

A discutir apartir de la ayudantía del 11 de Noviembre.