Semestre 2023/1

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 11

Ejercicio 46
Sea $L \supset K$ una extensión de Galois.

(a) Sea $a \in L$ con $\varphi(a) \neq a$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(L; K) \setminus \{\mathrm{Id}_K\}$. Demuestra: $K[a] = L$.

(b) Demuestra que existe $a \in L$ tal que $L = K[a]$.

Ejercicio 47
Determina los grupos de Galois de los polinomios $X^4 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$ y $X^4 - 6X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ como grupos de permutaciones de sus respectivas raíces.

Ejercicio 48
Sea K un campo con $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Demuestra:

(a) $F_p \colon K \to K, \alpha \mapsto \alpha^p$ es un homomorfismo de campos.

(b) Para $f \in K[X]$ se tiene $D(f) = 0$ si y solamente si existe un polinomio $g \in K[X]$ con $f = g(X^p)$.

(c) K es perfecto si F_p es suprayectivo. Pista: Verifica que en este caso ningun polinomio $f \in K[X]$ con $D(f) = 0$ es irreducible. En particular, todo campo finito es perfecto.

Ejercicio 49
En la clase comenzamos a discutir el campo de descomposición $F \supset \mathbb{Q}$ del polinomio $f := X^4 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Denotamos los ceros de f como sigue:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -x_1, \quad x_3 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}, \quad x_4 = -x_3.$$

Concluimos que el grupo de Galois $G := \mathrm{Gal}(f, \mathbb{Q})$ era isomorfo al grupo diédrico D_4.

(a) Describa G como subgrupo de $\mathfrak{S}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ y justifica.

(b) Describa todos los campos intermedios L de $K \supset \mathbb{Q}$ y sus respectivas inclusiones. ¿Para cuáles de estos campos intermedios es $L \supset \mathbb{Q}$ una extensión de Galois? Usa el teorema principal de la teoría de Galois para justificar el resultado.

Ejercicio 50
Consideramos los campos

$$L_1 := \mathbb{Q}[\sqrt{1+2i}, \sqrt{1-2i}], \;\; L_2 := \mathbb{Q}[\sqrt{6+2\sqrt{-7}}, \sqrt{6-2\sqrt{-7}}].$$

Demuestra que las extensiones de campos $L_i \supset \mathbb{Q}$ son de Galois para $i = 1, 2$. Determina en ambos casos el grupo de Galois y todos los campos intermedios.

A discutir en la ayudantía del 25 de Noviembre