

1. Generalidades

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Un $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ de $\mathbb{K}$ junto con un mapa bilineal

$$[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que cumple los siguientes condiciones

- $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ (antisimetría)
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$
para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$
(identidad de Jacobi)

Notas : $[x, x] = 0 \quad \forall x \Rightarrow$

$$[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ porque:}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \underline{[x+y, x+y]} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bil.}}}{=} \cancel{[x, x]} + [x, y] + [y, x] + \cancel{[y, y]} \\
 &= [x, y] + [y, x],
 \end{aligned}$$

- El nombre proviene del matemático noruego Sophus Lie (1842-1899)

- Un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} / \mathfrak{h}$ es un mapa $\mathbb{Q}$ -lin,

$$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}' \text{ tal que}$$

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]'$$

- Si $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie, entonces la multiplicación

por componentes convertida a

$$g_1 \times g_2 \times \dots \times g_n = g_1 \oplus \dots \oplus g_n$$

em um álgebra de Li

$$[(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)] := \\ ([x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n])$$

Exemplos Se A es um $\mathbb{K}$ -álgebra
associativo (e.g. $A = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$)
entonces podemos definir sobre
 A (como esp. vec.) un corchete
 $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$

7 se verifica que cumple las dos condiciones, y denotamos con A_L el álgebra de Lie con este corchete, que se llama el anti-commutador.

Un caso particular es cuando V es un $\mathbb{K}$ -esp. vect / $\mathbb{K}$ y $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ el anillo de endomorfismos $\mathbb{K}$ -lineales de V

En este caso escribimos

$$\mathfrak{gl}(V) := (\text{End}_{\mathbb{R}}(V))_L$$

$\mathfrak{gl}$ proviene de "general Lie algebra"

En el caso $V = \mathbb{R}^n$ identificamos

$$\mathfrak{gl}(V) \text{ con } (\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}))_L$$

y se escribe también

$$\mathfrak{gl}_n = (\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}))_L$$

$$\left(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \right)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) &\cong (\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n))_L \\ &\cong \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

• Un subálgebra de Lie $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$

es un álgebra de Lie que
es un subespacio de $\mathfrak{g}$ y

su corchete es inducido por
el corchete de $\mathfrak{g}$

En otras palabras $\mathfrak{g}'$ es un

subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ tal

que $\forall x, y \in \mathfrak{g}'$ se tiene
 $[x, y] \in \mathfrak{g}'$

Eso es ligeramente diferente de
la situación de anillos asociativos
donde se requiere para un sub-
anillo $B \subset A$ que $1_A \in B$
[$2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ no es un subanillo
de $\mathbb{Z}$...]

- Un ideal $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ es un sub-
espacio de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[z, y] = z$$

$$([i, x] = 1 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad x \in \mathfrak{g})$$

ideal $\Rightarrow$ subálgebra
 $\Leftarrow$

Ejemplos Si $X = (x_{ij}) \in \text{Mat}(\mathbb{R})_{n \times n}$

entonces $\text{Tr}(X) := \sum_{i=1}^n x_{ii}$

es la traza de X ,

Se define el álgebra de Lie

lineal especial

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \left\{ X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}(X) = 0 \right\}$$

eso es efectivamente un subálgebra de Lie porque

$$\text{Tr}(X \cdot Y) = \text{Tr}(Y \cdot X)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}([X, Y]) = \text{Tr}(X \cdot Y - Y \cdot X) = 0$$

• Un poco más general :

Si $f: V \times V \rightarrow W$ es

un mapeo bilineal

(V, W $\mathbb{K}$ -esp. vect.)

entonces

$$\mathfrak{o}(V, f) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \\ f(x(u), v) + f(u, x(v)) = 0 \\ \forall u, v \in V \}$$

es un subálgebra de Lie!
(de $\mathfrak{gl}(V)$)

De hecho, para

$x, y \in \mathfrak{o}(V, f)$ calculamos

$$\begin{aligned}
 f((x \circ y) \cdot (u), v) &= f((y \cdot x)(u), v) \\
 + f(u, (x \circ y) \cdot (v)) &= f(u, (y \cdot x) \cdot (v)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donde usamos

$$\begin{aligned}
 f((x \circ y) \cdot (u), v) &\stackrel{\text{Lix.}}{=} -f(y \cdot u, x \cdot v) \\
 &\stackrel{\text{Lix.}}{=} f(u, y \cdot x \cdot v)
 \end{aligned}$$

Caso particulares:

$$\text{ej) } V = \mathbb{R}^{2n} \quad \gamma \quad \ell: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por $\ell(v, w) = v^t \cdot S_{2n} \cdot w$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = S_{2n}$$

$\leadsto$ al álgebra de Lie
simplecticos $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$
 $= \mathfrak{ol}(\mathbb{R}^{2n}, S_{2n})$

la condición aquí es

explicitamente

$$x^t \cdot S_{p_{2n}} + S_{p_{2n}} x = 0$$

$$\text{ex2)} \quad V = \mathbb{R}^n, \quad f = \text{Id}_n$$

entonces $(f(v, w) = v^t \cdot w)$

$$v_n = \sigma(\mathbb{R}^n, \text{Id}_n)$$

son las matrices
antisimétricas!

$$x^t \cdot \text{Id} + \text{Id} \cdot x = 0$$