

Recordamos

$$f: V \times V \rightarrow W \quad \mathbb{K}\text{-bil.}$$

$$\leadsto \sigma(V, f) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x \cdot u, v) + f(u, x \cdot v) = 0 \\ \forall u, v \in V\}$$

es subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ porque

para $x, y \in \sigma(V, f)$ tenemos

$$\begin{aligned} & f([x, y] \cdot u, v) + f(u, [x, y] \cdot v) \\ &= f(xy \cdot u, v) - f(yx \cdot u, v) + f(u, xy \cdot v) - f(u, yx \cdot v) \\ &= 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{ya que por hipotesis} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \\ \text{asoc. + lin} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{asoc. hip} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \\ \text{asoc. hip} \end{array} \end{aligned}$$
$$f(xy \cdot u, v) \stackrel{\text{asoc. + lin}}{=} -f(y \cdot u, x \cdot v) \stackrel{\text{asoc. hip}}{=} f(u, yx \cdot v)$$

Nos interesa en particular el caso cuando $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

En este caso podemos identificar

$V = \mathbb{R}^n$ y f está dado por una matriz $f \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y la

forma bil es

$$u^t \cdot f \cdot v \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

En esta situación la condición

$$f(x \cdot u, v) + f(u, x \cdot v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u^t x^t) f \cdot v + u^t f(x \cdot v) = 0 \quad \forall u, v$$

$$\Leftrightarrow x^t f + f x = 0$$

} Casos importantes

$$b1) \quad f = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = Sp_n, \quad V = \mathbb{R}^{2n}$$

$$\uparrow \mathcal{P}(2n, \mathbb{R}) := \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n}, Sp_n)$$

$$b2) \quad V = \mathbb{R}^n, \quad f = id_n$$

entonces la condición es

$$x^t \cdot id_n + id_n \cdot x = 0$$

$\therefore x$ antisim.

Resulta conveniente distinguir
los casos dependiendo de la
paridad de n :

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{R}) := \mathcal{O}(2n, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix})$$

$$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{R}) := \mathcal{O}(2n+1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{0} & \tilde{I}_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix})$$

Obs. Veremos que con estos
ejemplos cubrimos todas las
series de álgebras de Lie
simples / $\mathbb{C}$
(quedan solamente 5 excepcionales)

c) Las matrices (estrictamente)
triangulares de tamaño $n \times n$

forman otro subálgebra de Lie
de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

triáng.

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

estr. triáng.

d) Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se
llama abeliano si

$$[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Por ejemplo las matrices diagonales
forman un subálgebra de Lie
abeliano de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

Def: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$
se llama irreducible si $\mathfrak{g} \neq 0$

y si los únicos ideales de $\mathfrak{g}$
($\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ ideal $\Leftrightarrow [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{r}$)

son los triviales i.e. 0 y $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$ es simple si es irreducible

y no abeliano

(descartamos el álgebra de Lie unidim.
abeliano de dim. 1)

Observación: Veremos que
nuestras álgebras de Lie

$$\mathfrak{so}_{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow A_n \quad n \geq 1$$

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow B_n \quad n \geq 2$$

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow C_n \quad n \geq 3$$

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{R}) \hookrightarrow D_n \quad n \geq 4$$

son todas las series de álgebras
de Lie simples
Las restricciones sobre n

se incluyen para evitar
repeticiones en nuestra lista
como por ejemplo

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

$$\mathbb{P}^4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$$

...

Ver ejemplos.

1.2 Representaciones

Def. Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathfrak{g}$ un alg. de Lié / $\mathbb{K}$

Una representación de $\mathfrak{g}$

consiste (formalmente) de

una pareja (V, ρ) donde

V es un espacio vect / $\mathbb{K}$

y $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

es un álgebra modular de
objetos de $\mathcal{H}^1$. ($\mathbb{Z}$ -bilineal!)

Alternativamente, una operación
de $\mathcal{g}$ sobre V es un mapeo

$$\tilde{\mathcal{g}} : \mathcal{g} \times V \longrightarrow V \quad \mathbb{Z}\text{-bilineal},$$

$$(x, v) \longmapsto x \cdot v = x \circ v$$

$$\text{t. g. } \forall x, y \in \mathcal{g}, v \in V \text{ se}$$

tiene:

$$x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [x, y] \cdot v$$

claramente, las dos nociones

son equivalentes, por ejemplo
si $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \text{gl}(V)$ es una
rep. entonces

$$\tilde{\rho}(x, v) := \rho(x) \cdot v$$

muchas veces no se menciona
 $\rho / \tilde{\rho}$ explícitamente y se
dice simplemente que V es una
representación o simplemente
(implícitamente quien es ρ)

Ejemplos • $\text{id}: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

convirtiendo a V en la representación
estándar de $\mathfrak{gl}(V)$,

($x \in \mathfrak{gl}(V)$ actúa sobre V
por mult. $x \cdot (v)$)

• el mapeo $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

convirtiendo a V en una rep.

de V dando todas las el.

de $\mathfrak{g}$ acción sobre V por ρ

En el caso $V = k$ esto se
llama la representación trivial
de $\mathfrak{g}$.

$$\bullet \quad V = \mathfrak{g} \quad \gamma$$

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$x \mapsto [x, -]$$

$$(\gamma \mapsto [x, \gamma])$$

vale la pena de verificar que
eso es efectivamente un hom.

de álgebra de Lie!

Esto se llama la representación adjunta de $\mathfrak{g}$.

Def. Si $V = (V, \rho)$ es una representación de $\mathfrak{g}$, entonces

$$V^{\mathfrak{g}} := \{ v \in V \mid x \cdot v = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g} \}$$

son la $\mathfrak{g}$ -invariante de $\mathfrak{g}$.

- Si V, W son representaciones de g entonces

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W) \cong V \otimes_{\mathbb{Z}} W$$

(son representaciones de g)
 mca:

$$(x \cdot \varphi) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$$

$$(x \cdot \varphi)(v) := x \cdot (\underbrace{\varphi(v)}_{\in W}) = \varphi(x \cdot v)$$

chevar!

$$\underbrace{\varphi(v)}_{\in W} \in V$$

$$x \cdot (v \otimes w) := x \cdot v \otimes w - v \otimes x \cdot w$$

(cheer!) _•

Con estas construcciones definimos

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) := \left(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W) \right)^{\mathfrak{g}}$$

$$\left\{ \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W) \mid \right.$$

$$\left. x \cdot \varphi = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g} \right\}$$

$$(x \cdot \varphi)(v) = x \cdot \varphi(v) - \varphi(x \cdot v)$$

$$\therefore x \cdot \varphi(v) = \varphi(x \cdot v) \quad \forall v \in V$$

son los $\mathbb{K}$ -matrices $\mathbb{K}$ -lineales
de V en W .

Def. Sea V una representación
de $\mathfrak{g}$, U un subesp. $\mathbb{K}$ -lin.
de V .

U es una subrepresentación de V

si $x \cdot u \in U \quad \forall x \in \mathfrak{g}, u \in U$

En este caso, el espacio cociente

V/U tiene una estructura

natural de rep. de g
 $x(v + u) := x \cdot v + u$

está bien definida γ

tenemos un hom. g -lineal de

$$V \rightarrow V/U, \quad v \mapsto v + U$$

Def. Una rep. V de g es simple

si V solamente tiene las sub-
rep. triviales $0 \subset V$

Obs. De esta forma las rep.

$\text{Rep}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ forman una
categoría abeliana
(γ monoidal)

Ejemplo Sea $\mathcal{E}$ un campo en $\text{Set}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$
alg. cerrado

$$\mathcal{G} = \text{rl}(\mathbb{Z}, \mathcal{E})$$

Veremos al vermes que para
cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe salvo
isomorfía una rep. simple

$L^{(m)}$ de dimensión m

Y toda rep. de dim. finita
es una suma directa de estos
simples.